МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Задачи на «вычисление площадей»
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 461 группы
направления 44.03.01 Педагогическое образование (профиль – математическое образование) механико-математического факультета

Егоровой Анастасии Андреевны

Научный руководитель
ст. преподаватель ________________ С. В. Лебедева
подпись, дата

Зав. кафедрой
к. п. н., доцент ______________________ И.К. Кондаурова
подпись, дата

Саратов 2019

Введение. Среди предметов школьного курса геометрия занимает одно из ведущих мест, оказывая значимое и многоплановое влияние на духовное становление личности. Она играет огромную роль в формировании общечеловеческой культуры, знакомит учащихся с явлениями окружающей действительности; развивает пространственное воображение, формирует мировоззрение и интеллект; дает возможность для проявления и развития творческих способностей школьников; способствует накоплению их нравственного и эстетического потенциала.

Геометрия зародилась в древности из практических и хозяйственных нужд людей: во всех древних цивилизациях решались однотипные задачи, относящиеся к нахождению площадей, при этом способы вычисления в каждой из стран были как точные, так и приближенные.

Используя исторические сведения при обучении решению метрических задач, тематика которых относится, в том числе, и к формированию подходов, приемов вычисления площадей геометрических фигур, учитель тем самым создает положительную мотивацию для изучения как отдельных тем и разделов предмета, так и всего курса геометрии.

Исторически сложилось так, что при решении школьниками геометрических задач, относящихся к вычислению площадей прямолинейных фигур, наметились два подхода. Один связан с понятием равновеликости и равносоставленности, а другой – аналитический – с использованием формул для вычисления площади.

Многие отечественные ученые – авторы школьных учебников, учебно-методической литературы для учителей и учащихся: А. П. Киселев (1892 г.); И. Н. Кавун (1923 г.); Н. А. Рыбкин (1935 г.); О. К. Житомирский, Б. Н. Делоне (1949 г.); Н. А. Глаголев и А. А. Глаголев (1954 г.); В. А. Жаров, П. С. Марголите, З. А. Скопец (1965 г.); Н.Н. Никитин (1967 г.); А. Н. Колмогоров, А. Ф. Семенович, Р. С. Черкасов (1979 г.); А. В. Погорелов (1982 г.); А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик (1991 г.); Л. С. Атанасян, В. Ф Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк (1992 г.), И. Ф. Шарыгин, Л. Н.

Ерганжиева (1992 г.) и др.; – так или иначе, в своих методических работах затрагивали данную тему.

Работы Т. А. Корешковой и В. В. Цукермана, Л. Д. Иванова, В. В. Произволова , С. А. Захарова, Б. П. Гейдмана, М. М. Ивановой, Ж. Х. Эдиевой, Н. Г. Шило и других посвящены применению площадей к решению задач на вычисление.

В статьях В. А. Лифановой, А. А. Прокофьева, Д. Пойя, В. Г. Болтянского рассмотрены вопросы формирования у учащихся рациональных приемов работы при решении задач на вычисление площади.

Методические вопросы, связанные и измерением геометрических величин, и площадей, в частности, освещаются в диссертациях М. А. Казаковой, Ш. Мусавирова, Э. Г. Готмана, З. И. Турлаковой и др.

Э. Г. Готман, И. А. Кушнир, Н. Д. Новиков, В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин показывают в своих работах методы вычисления площадей, но не описывают теорию и методику обучения этим методам. З. И. Турлаковой излагается методика изучения в старших классах темы «Площадь геометрической фигуры».

Целью бакалаврской работы является выявление возможностей задач на вычисление площадей в математическом образовании учащихся основной школы.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие задачи:

1) уточнить понятие задачи на вычисление площади;

2) систематизировать задачный материал курса геометрии основной школы, связанный с вычислением площадей;

3) охарактеризовать методы вычисления площадей с методических позиций;

4) разработать методические рекомендации по обучению учащихся решению задач на вычисление площадей.

Для решения поставленных задач применялись следующие методы исследования: анализ научной, научно-методической, методической, учебно-методической и учебной литературы, теоретическое обобщение и системный анализ.

Структура работы: титульный лист, введение, две главы («Понятие задачи на вычисление площади», «Методические аспекты обучения решению задач на вычисление площадей»), заключение, список использованных источников.

Основное содержание работы. В первой главе «Понятие задачи на вычисление площади» решались первая, вторая и третья задачи бакалаврской работы. Дано определение задач на вычисление площади и исходя из него структура задач.

Выделим из задач школьного курса математики те, в которых требуется так или иначе найти (измерить, вычислить) площадь плоской фигуры ограниченной некоторой линией; будем называть такие задачи задачами на вычисление площади. Из введённого определения следует структура задач на вычисление площади, представленная компонентами:

A – условие задачи, содержащее описание фигуры – её модель;

B – требование задачи;

C – базис решения задачи, то есть теоретическая и практическая основа, необходимая для обоснования решения;

D – способ, определяющий процесс решения задачи.

В зависимости от способа представления условия задачи на вычисление площадей можно выделить:

– символизированные [математические] задачи;

– текстовые математические задачи;

– текстовые практические задачи;

– задачи на готовых чертежах;

– задачи на клетчатой бумаге;

В зависимости от требования задачи на вычисление площадей можно выделить:

– задачи, сформулированные в общем виде (задачи на «вывод» формул);

– частные задачи (на нахождение значения площади);

– задачи на поиск/обоснование нового метода/способа вычисления;

– задачи на изменение значения площади при изменении линейных или угловых размеров фигуры;

– практические задачи на выбор и измерение линейных и угловых размеров фигуры с последующим вычислением её площади;

В зависимости от способа решения задачи на измерение площадей можно выделить:

– задачи, решаемые исключительно практическими методами;

– задачи, решаемые теоретическими методами после найденного практического решения.

Базис решения задачи на вычисление площади определяет выбранные метод, способ и/или приёмы решения.

Вычисления с использованием клетчатой бумаги или палетки проводятся: (а) для любых многоугольников с вершинами в узлах сетки клетчатой бумаги – точные вычисления; (б) для любых других плоских фигур – приближенные вычисления.

Метод разрезания и складывания основан на принципах проведения простых геометрических построений и использования простейших свойств площади. Так, например, если удается разбить два многоугольника на одинаковые части, то отсюда вытекает, что их площади равны. Иногда проще дополнить фигуры некоторыми одинаковыми частями, чтобы убедиться, что они равновелики.

Алгебраический метод основан на преобразовании формул, использовании уравнений, неравенств и их систем, составленных по условию задачи на основании теорем геометрии.

К каждой классификации задач предложен пример задачи. Применение методов продемонстрировано на решениях этих задач.

Во второй главе «Методические аспекты обучения решению задач на вычисление площадей» решалась четвертая задача бакалаврской работы. Нами была выбраны задачи из первой главы, которые зависят от способа предоставления условия задачи и на конкретных примерах с подробными решениями показана методика их изучения.

В первом разделе говорится о методике обучения решению символизированных задач.

В символизированных задачах фигуры, площадь которых нужно найти, задаются:

– координатами своих вершин (в случае многоугольников) или других, принадлежащих фигуре точек (например, окружность можно задать тремя точками) – задачи I типа;

– уравнениями контура – задачи II типа;

– уравнениями и координатами – задачи смешанного типа.

Рассмотрим символизированные задачи I типа, выделив следующие классы задач:

I.1 – нахождение площади многоугольника с целочисленными вершинами.

I.2 – нахождение площади многоугольника, у которого хотя бы одна вершина имеет координату, не являющуюся целым числом.

I.3 – нахождение площади многоугольника определённого вида (например, параллелограмма), данные о котором выражены в координатной форме.

I.4 – нахождение площади круга, заданного тремя точками соответствующей окружности.

Хотя все задачи типа I имеют прямое отношение к аналитической геометрии и координатному методу, задачи класса I.1 могут быть решены с использованием свойств клетчатой бумаги или формулы Пика.

Рассмотрим теперь три других класса задач первого типа. В курсе геометрии даётся (выводится/доказывается) ничтожно малое число формул «в координатах». Среди них формула расстояния между двумя точками $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$: $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ и косинуса угла AOB с вершиной в начале координат $cos\,AOB = \dfrac{x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \cdot \sqrt{x_B^2 + y_B^2}}$

Если известны координаты всех вершин, то площадь заданной геометрической фигуры (треугольника, прямоугольника, трапеции, ромба и т.д.) можно найти по «стандартным» формулам, предварительно вычислив необходимые длины сторон, диагоналей и прочих отрезков (всё зависит от фигуры) и углы.

Целесообразно требовать от учащихся использования всех имеющихся в их арсенале формул, способов и методов (поскольку координаты – целые числа, то задача может быть отнесена к классу I.1 и решена с использованием формулы Пика или свойств клетчатой бумаги), а также способствовать выводу новых формул, способов и методов.

Площадь треугольника через координаты вершин можно найти по формуле площади Гаусса (формула землемера или формула/алгоритм шнурования).

Учащимся следует сначала предложить использовать формулу для вычисления площадей треугольников, а затем, убедившись в её рациональности – попробовать вывести в ходе исследовательской работы, где они должны умело сочетать координатный метод и практический способ вычитания из площади описанного около треугольника прямоугольника площадей «лишних» треугольников.

Задачи типа I.3 требуют знания свойств геометрических фигур и геометрических преобразований плоскости.

В задачах класса I.4 требуется найти значение площади круга, заданного тремя точками $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ и $(x_3; y_3)$ соответствующей окружности, которая будет описанной около треугольника с вершинами в заданных точках. Поскольку площадь круга равна πR^2, то наша задача сводится к вычислению квадрата радиуса описанной около треугольника окружности. Поиску радиуса помогает уравнение окружности с центром в точке $(x_0;\ y_0)$ и радиусом R: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Нам не известны ни $(x_0; y_0)$, ни R^2, но их можно найти из системы трёх уравнений, подставляя в уравнение окружности координаты данных точек: $\begin{cases} (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2 \\ (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = R^2 \\ (x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$.

Рассмотрим символизированные задачи II типа (фигура задана уравнениями контура), выделив следующие классы задач:

II.1 – нахождение площади многоугольника, заданного уравнениями прямых;

II.1 – нахождение площади фигуры, отличной от многоугольника, заданного уравнениями контура; типичный пример – нахождение площади криволинейной трапеции. Использование методов математического анализа не позволяет вычислять точное значение площади в курсе 5-9 классов, но использовать численные методы вполне возможно.

Во втором разделе говорится о методике обучения решению текстовых математических задач.

Текстовые математические задачи составляют большинство всех задач на вычисление площади школьного курса планиметрии. Залогом успеха решения задач являются:

1) правильно построенный чертёж к задаче,

2) полный анализ данных условия, на основе которого осуществляется

3) рациональный выбор формул и составление на их основе разрешающей алгебраической модели задачи.

В третьем пункте говорится о методике обучения решению текстовых практических задач.

К практическим отнесем задания лабораторных работ – класс III.1, и задачи реальной математики на вычисление площадей – класс III.2.

В четвертом разделе говорится о методике обучения решению задач на готовых чертежах.

Задачи на готовых чертежах образуют, как правило, серии, объединённые некоторым общим (серийным) признаком. Такие серии есть, например, в пособии «Учимся решать задачи по геометрии». Каждая серия включает 16 задач, объединённых по темам: «Площадь четырехугольника», «Площадь треугольника», «Площадь круга и его частей».

При работе с чертежом к геометрической задаче большое значение имеет специальное формирование соответствующих приемов. Приемы работы с чертежом могут быть разной степени сложности и обобщенности. Более сложный прием состоит из большого числа действий, включая в себя в качестве составляющих другие приемы.

Наиболее обобщенными являются приемы:

1) Подведение геометрической фигуры под понятие, то есть распознавание фигуры.

2) Выделение геометрической фигуры на чертеже. Обнаружение фигуры осуществляется на основе ее зрительного образа, в котором должны быть отражены существенные признаки соответствующего понятия.

3) Вывод непосредственных действий.

4) Установление вида геометрической фигуры на чертеже, если указан признак отличия, лежащий в основе классификаций фигур данного рода.

5) Включение одного и того же элемента чертежа в разные конфигурации и выражение его в терминах этих фигур.

6) Нахождение общих элементов геометрических фигур на чертеже.

7) Разностороннее рассматривание геометрической фигуры на чертеже.

8) Изменение взаимного расположения образов фигур, представленных на чертеже.

В пятом пункте говорится о методике обучения решению задач на клетчатой бумаге.

Методисты и психологи отмечают, что в возрасте 10-12 лет (5-6 класс) лучше всего работать с пространственными телами. Если же обратиться к геометрии плоскости, то лучшим источником задач на преобразование и конструирование фигур является лист клетчатой бумаги. Здесь, кроме того, в неявной форме задаётся система координат и происходит арифметизация плоскости. Отметим ещё, что часто решения задач на клетчатой бумаге очень красивы, они обладают свойством симметрии, что способствует развитию у школьников эстетических чувств соразмерности и гармонии.

О задачах на клетчатой бумаге много говорилось и в первой, и во второй главе бакалаврской работы. Их обобщение – задачи на плоских решётках – рассмотрены в данном разделе.

Заключение. Основные результаты бакалаврской работы.

1. Мы выделили из задач школьного курса математики те, в которых требуется так или иначе найти (измерить, вычислить) площадь плоской фигуры ограниченной некоторой линией; будем называть такие задачи *задачами на измерение площади*.

2. В зависимости от способа представления условия задачи на измерение площадей можно выделить: символизированные [математические], текстовые математические, текстовые практические задачи, задачи на готовых чертежах и задачи на клетчатой бумаге.

3. В зависимости от требования задачи на измерение площадей можно выделить: задачи, сформулированные в общем виде (задачи на «вывод» формул), частные задачи (на нахождение значения площади), задачи на поиск/обоснование нового метода/способа измерения, задачи на изменение значения площади при изменении линейных или угловых размеров фигуры.

4. В зависимости от способа решения задачи на измерение площадей можно выделить: задачи, решаемые исключительно теоретическими методами,

задачи, решаемые исключительно практическими методами, задачи, решаемые теоретическими методами после найденного практического решения.

5. Базис решения задачи на измерение площади определяет выбранные метод, способ и/или приёмы решения. В работе рассмотрены следующие из них: вычисления с использованием клетчатой бумаги; метод разрезания и складывания; алгебраический метод и их сочетания.

6. В работе рассмотрены подходы к решению

– *символизированных* задач на вычисление площади фигуры, которая задаётся: (а) координатами своих вершин (в случае многоугольников) или других, принадлежащих фигуре точек (например, окружность можно задать тремя точками) – задачи I типа, которые для удобства разбиты на 4 класса; (б) уравнениями контура – задачи II типа, которые разбиты на 2 класса; (в) уравнениями и координатами – задачи смешанного типа (подход к решению демонстрируется на примере задачи с параметром);

– *текстовых математических задач,* для которых выделены методические условия успешности решения: правильно построенный чертёж к задаче, полный анализ данных условия, на основе которого осуществляется рациональный выбор формул и составление разрешающей алгебраической модели задачи;

– *текстовых практических задачи*, которые делятся на 2 класса: задания лабораторных работ и задачи реальной математики на вычисление площадей; оба класса предполагают проведение экспериментальной работы, формулировку гипотез и их обоснование;

– *задач на готовых чертежах*; требующих специальных обобщенных приемов деятельности: (а) подведение геометрической фигуры под понятие, то есть распознавание фигуры; (б) выделение геометрической фигуры на чертеже на основе ее зрительного образа, в котором должны быть отражены существенные признаки соответствующего понятия; (в) вывод непосредственных действий; (г) установление вида геометрической фигуры на чертеже, если указан признак отличия, лежащий в основе классификаций фигур данного рода; (д) включение одного и того же элемента чертежа в разные конфигурации и выражение его в терминах этих фигур; (е) нахождение общих элементов геометрических фигур на чертеже; (ж) разностороннее рассматривание геометрической фигуры на чертеже и, при необходимости, (е) изменение взаимного расположения образов фигур, представленных на чертеже;

– *задач на клетчатой бумаге*, где в неявной форме задаётся система координат и происходит арифметизация плоскости; особое внимание уделяется обобщению этих задач до класса задач на плоских решётках.

Всё вышеперечисленное позволяет утверждать, что все задачи бакалаврской работы полностью решены; предложенные методические решения ряда вопросов преподавания геометрии освещаются впервые и заслуживают дальнейшей разработки.

Результаты бакалаврской работы могут быть использованы в теории и педагогической практике обучения учащихся основной школы вычислению площадей.