МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Векторы в школьном курсе математики
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 461 группы
направления 44.03.01 Педагогическое образование (профиль – математическое образование) механико-математического факультета
Красножен Екатерины Вадимовны

Научный руководитель
к. п. н., доцент ______________________ И.К. Кондаурова

Зав. кафедрой
к. п. н., доцент ______________________ И.К. Кондаурова

Саратов 2019

Введение. Исчисление векторов в школьном курсе математики является важным вспомогательным средством. В частности, векторное решение многих стереометрических задач значительно проще их решения средствами элементарной геометрии. Причина этого «упрощения» заключается в том, что при векторном методе решения стереометрической задачи можно обойтись без тех дополнительных построений, которые иногда затрудняют поиск решения даже некоторых простых геометрических задач. Можно с уверенностью говорить о том, что изучение векторного метода является неотъемлемой частью школьного курса математики. Умение проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами, необходимы для успешной сдачи ОГЭ и ЕГЭ по математике. Этим обуславливается актуальность выбора темы бакалаврской работы.

В науке имеется достаточно исследований, образующих теоретический базис работы. Методическими аспектами изучения темы «Векторы» занимались все авторы школьных учебников геометрии, в том числе: А. Д. Александров, Л. С. Атанасян, В. Г. Болтянский, М. Б. Волович, Э. Г. Готман, В. А. Гусев, А. Н. Колмогоров, Ю. М. Колягин, В. И. Рыжик, З. А. Скопец, И. М. Яглом и др.

Диссертационные исследования по ряду методических вопросов изучения векторов в школьном курсе математики отнесены, как правило, в концу XX века; укажем некоторые из них: «Система изучения векторов на факультативных занятиях как пример осуществления межпредметных связей дисциплин естественно-математического цикла» (С. В. Бабаджанян, 1970), «Обучение основам векторной алгебры в процессе решения геометрических задач в средней школе» (Т. М. Корикова, 1979), «Методические особенности изучения векторов в курсе планиметрии при их введении на координатной основе» (Е. П. Нелин, 1984), «Прикладные аспекты изучения векторов в курсе математики средней школы» (Л. Б. Клейн, 1985), «Систематизация и закрепление знаний учащихся в процессе решения задач при изучении векторов в курсе планиметрии средней школы» (Е. А. Василенко, 1987), «Векторный метод как средство систематизации геометрических знаний и умений учащихся» (С. Р. Джапаров, 1987), «Методика использования вектора для решения прикладных задач на уроках математики в неполной средней школе» (Суфиев, Ахмад, 1989), «Методика изучения понятия «Вектор» и его свойств в основной школе» (О. И. Новгородова, 2006). Некоторые аспекты изучения векторов находим в диссертации Л. И. Боженковой «Методическая система обучения геометрии, ориентированная на интеллектуальное воспитание учащихся общеобразовательной школы».

Многочисленные статьи учителей математики, педагогов-математиков и математиков-педагогов, посвященные различным методическим аспектам изучения векторов школьниками, выходили и выходят в ведущих научно-популярных, научно-методических и методических журналах, в сборниках статей и материалах научных конференций: В. Г. Болтянский и И. М. Яглом, А. А. Боцу, В. М. Клопский, Г. Д. Глейзер, Е. В. Якушина, Б. Н. Борлыкова, Б. Б. Банчев, К. Лезан, О. С. Шулбаева, Н. И. Еремеева, В. И. Игошин, Сидорякина, А. Ф. Саниахметова, А. В. Лашманкина и др.

Векторной тематике посвящены отдельные научно-популярные и учебно-методические издания, а также главы в книгах для учителя следующих авторов: В. Г. Болтянский и И. М. Яглом, М. Б. Волович, Э. Г. Готман и З. А. Скопец, В. А. Гусев, В. И. Рыжик, З. И. Кузичева, А. И. Кушнир, Г. И. Саранцев, Г.А. Клековкин и др.

Несмотря на достаточное внимание со стороны учёных и практикующих учителей к векторной тематике, возникает необходимость выявить и охарактеризовать современные подходы к изучению векторов в школьном курсе математики.

Цель бакалаврской работы: сформулировать методические рекомендации для организации изучения темы «Векторы» в условиях современной общеобразовательной школы.

Задачи бакалаврской работы:

1. Проследить историю обучения векторному исчислению в практике российской общеобразовательной школы.

2. Разработать методическую схему изучения темы «Векторы» в современном школьном курсе планиметрии.

Методы исследования: анализ научной, научно-методической, методической, учебно-методической и учебной литературы, теоретическое обобщение, педагогическое проектирование.

Практическая значимость работы заключается в обобщении и систематизации материала по методике обучения учащихся средней школы теме «Векторы».

Структура работы: введение; две главы («История обучения векторному исчислению в практике Российского образования»; «Методические аспекты изучения векторов в школьном курсе математики»); заключение; список использованных источников.

Основные положения исследования, проводимого в рамках бакалаврской работы, докладывались на Ежегодной студенческой научной конференции «Математика. Механика» (доклад «Векторы в школьном курсе математики», Саратов, СГУ, механико-математический факультет, 26 апреля 2019 г.).

Основное содержание работы. В первой главе «История обучения векторному исчислению в практике Российского образования» решалась первая задача бакалаврской работы.

В середине двадцатого столетия в высших учебных заведениях России практикуется векторное изложение геометрии на основе аксиоматики Вейля. С этого времени владение векторным методом и даже само векторное осмысление геометрии становится для выпускников университетов и пединститутов, для инженеров, близких к математике специальностей, необходимым элементом культуры и мировоззрения.

В 1963 году В. Г. Болтянский и И. М. Яглом написали новый учебник геометрии для IX классов, отличающийся методической последовательностью и продуманностью введения векторов в типично школьную тематику, а также оригинальной системой задач, в которых применялись векторы.

Учебник В. Г. Болтянского и И. М. Яглома, хотя и имел статус «Рекомендовано Министерством просвещения РСФСР», но просуществовал в школе всего 2 года, так как не вписывался в концепцию стабильных учебников А. П. Киселева (и его последователей), по которым учащиеся учились до IX и в X классе.

Учебник В. Г. Болтянского и И. М. Яглома не сыграл большой роли в воспитании и обучении школьников, то для учителей, преподавателей пединститутов, методистов, ученых появление этого учебника не только не осталось бесследным, но и имело важные последствия: впервые была показана возможность систематического построения школьного курса геометрии на векторной основе.

В книге «Векторы в курсе геометрии средней школы», изданной Учпедгизом в 1962 году (и предшествовавшей появлению школьного учебника), В. Г. Болтянский и И. М. Яглом рассмотрели три различных пути введения понятия вектора. Первый из них – вектор как направленный отрезок – требует при изложении материала постоянных оговорок, связанных с понятием «равенство» векторов, подобно тому как следует различать «равные» в смысле совпадающие треугольники и «равные» в смысле конгруэнтные треугольники. Второй путь – использование понятия свободного вектора, широко применяющегося в математике и механике; – в школьной трактовке может означать, что вектором называется не один направленный отрезок, а целый класс направленных отрезков, имеющих одно и то же направление и одинаковую длину; для таких векторов «равенство» означает совпадение и все операции над векторами определяются четко и математически корректно. Третий путь – вектор как параллельный перенос – математически очень близок ко второму.

Введение векторов в школьное математическое образование связано с учебным пособием по геометрии для VI-VIII классов под редакцией А. Н. Колмогорова; в течение 15 лет работы по этому учебному пособию и согласованному с ним пособию по стереометрии для IX-X классов под редакцией З. А. Скопеца «была еще раз проверена и подтверждена жизненность и важность понятия вектора для школьной геометрии».

Параллельно с учебным пособием под редакцией А. Н. Колмогорова был написан еще один пробный учебник по геометрии. Его авторы (В. Г. Болтянский, М. Б. Волович, А. Д. Семушин). Отличием этого пробного учебника является то, что количество геометрических задач, решаемых векторным методом, существенно увеличено. Введение скалярного произведения векторов не только значительно облегчает изложение ряда тем геометрии (яркий пример – теорема косинусов), но и позволяет осуществлять (что не менее важно) межпредметные связи курса математики с курсом физики. К тому времени, когда в физике вводится понятие работы, курс математики подготавливает рассмотрение общей формулы работы, содержащей скалярное произведение вектора силы и вектора перемещения.

Говоря об истории становления векторного метода в школьном преподавании и об этапах его усвоения педагогической теорией и практикой, следует сказать об одном направлении применения векторов в элементарной геометрии – построении школьного курса геометрии на основе векторной аксиоматики. Очень многое для приближения этой трактовки в школе сделали В. Г. Болтянский и И. М. Яглом, которые в ряде своих статей разъяснили основные положения вейлевской концепции и те преимущества, которые она дает для школьного преподавания.

Сторонник построения единого математического курса, В. И. Рыжик не мог обойти стороной проблемы векторного изложения геометрии. В своей книге В. И. Рыжик представляет вариант построения курса стереометрии для математических школ; программа факультатива по основам четырехмерной геометрии, здесь же впервые В. И. Рыжик вводит понятие симплекс. Также в книге В. И. Рыжик приводит векторное доказательство неравенств.

Педагог, заслуженный работник высшей школы РФ Г. И. Саранцев в книге, рассматривая специальные методы доказательства, выделяет векторный, координатный методы. Также вводит элементы векторной алгебры, приводит словарь для перевода с геометрического языка на язык координат на плоскости.

На сегодняшний день в базисном документе стандартов второго поколения «Фундаментальное ядро содержания общего образования» косвенно определена цель изучения векторов в школьном курсе математики – применение при решении геометрических задач.

Содержание реализовано в современных УМК по геометрии, и в первую очередь, в учебниках геометрии. На 2019-20 учебный год федеральный перечень учебников геометрии представлен девятью УМК, в которых содержание темы «Векторы».

Во второй главе «Методические аспекты изучения векторов в школьном курсе математики» решалась вторая задача бакалаврской работы. Нами были систематизированы все выявленные трактовки вектора с указанием потенциальной возможности использовать ту или иную трактовку понятия в учебном процессе:

– направленный отрезок;

– свободный вектор – класс направленных отрезков одинаковой длины и направления;

– упорядоченная пара точек, первая из которых есть начало вектора, вторая – его конец;

– n-ка чисел его проекций на оси координат или коэффициентов его разложения по базисным векторам;

– параллельный перенос;

– элемент абстрактного (определяемого лишь его свойствами, сформулированными в аксиомах) векторного пространства;

– геометрическое число.

В современных учебниках утвердилось два подхода к определению вектора: вектор как направленный отрезок и вектор как направленный отрезок с последующим рассмотрением его в декартовой системе координат, причем второй подход имеет две возможных реализации.

Нами разработаны три методические схемы соответствующие указанным подходам.

<u>Методическая схема 1 – традиционная (векторная алгебра + векторно-координатный метод).</u>

1) Введение понятия вектора

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется направленным отрезком или вектором.

2) Классификация векторов – рисунок 1

Рисунок 1 – Классификация векторов (второй и третий этапы традиционной методической схемы изучения векторов)

3) Умножение вектора на число

4) Сумма и разность векторов

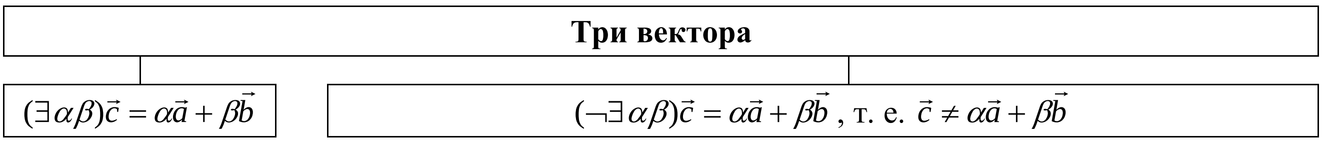

Рисунок 2 – Классификация тройки векторов (четвёртый этап традиционной методической схемы изучения векторов)

6) Скалярное произведение векторов

7) Применение векторов к решению задач (векторный метод) – таблица 3 (в таблице серые ячейки содержат материал курса 10-11 классов).

Таблица 3. Применение векторов к решению задач

Язык [классической] геометрии	Язык векторов
$AB \parallel CD$	$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD},\ k \neq 0$
$AB \perp CD$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
Точка C принадлежит прямой AB: $C \in AB$	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$ или $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}$, или $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$
	$\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB}$, где O – произвольная точка, $p + q = 1$
M – середина отрезка AB	$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$
	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, где O – произвольная точка
Точка C делит отрезок AB в отношении $AC : CB = m : n$	$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$
	либо $\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$, где O – произвольная точка
M_1 – середина отрезка A_1B_1 M_2 – середина отрезка A_2B_2	$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2})$
M – центроид [точка пересечения медиан] треугольника ABC	$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$
	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, где O – произвольная точка
$ABCD$ – параллелограмм	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$,
	$\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$, где M – произвольная точка, а O – точка пересечения диагоналей параллелограмма
$AB \perp a$, CD и MK – пересекающиеся прямые плоскости a	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ и $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$
O, A, B, C – точки одной плоскости	$x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, где x, y, z – действительные числа и $x + y + z = 1$

8) Координаты вектора

9) Векторно-координатный метод решения задач основан на ряде теорем аналитической геометрии – таблица 4.

Таблица 4. Векторно-координатный метод

Язык геометрии	Язык координат
Длина отрезка AB	$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$
Площадь треугольника ABC	$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix}$, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$

Точка $M(x;y)$ делит отрезок AB в отношении λ, т. е. $\frac{AM}{MB}=\lambda$	$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, где $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$
Точка $M(x;y)$ – середина отрезка AB	$x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$, где $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$
Прямая AB	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, где $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $x_2\neq x_1$, $y_2\neq y_1$
Прямая пересекает ось Ox под углом $a\neq 90^0$	$y=kx+b$, где k – угловой коэффициент прямой, b – ордината точки пересечения прямой осью Oy $(k\neq 0)$
Прямая $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ параллельны	$k_2=k_1$, $b_1\neq b_2$
Прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ перпендикулярны	$k_2=-\frac{1}{k_1}$ $(k_1\neq 0)$
Прямая параллельна оси Ox	$y=b$, где b – ордината точки пересечения прямой осью Oy $(b\neq 0)$

Методическая схема 2 (вектор – упорядоченная пара точек, первая из которых есть начало вектора, вторая – его конец, например, AB: $A(3;4)$ – начало, $B(-1;8)$).

1) Понятие об абсолютной величине и направлении вектора.

Вектором называется направленный отрезок. Направление вектора определяется указанием его начала и конца. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет началом точку $A_1(x_1;y_1)$, а концом – точку $A_2(x_2;y_2)$. Координатами вектора $\vec{a}$ будем называть числа $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$.

2) Понятие о равенстве векторов

3) Координаты вектора

4) Сумма и разность векторов

5) Умножение вектора на число

7) Скалярное произведение векторов

8) Разложение вектора по координатным осям

9) Применение векторно-координатного метода к решению задач

Методическая схема 3 (вектор – пара чисел – проекций радиус-вектора на оси координат или коэффициентов его разложения по базисным векторам)

1) Понятие вектора

Если указано, какая точка является началом отрезка, а какая точка – его концом, то такой отрезок называется направленным отрезком, или вектором.

2) Координаты вектора

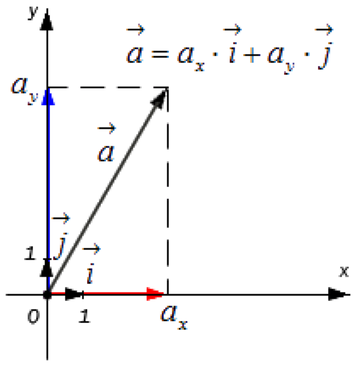

Рисунок 3 – радиус-вектор и его координаты

Рассмотрим на координатной плоскости вектор $\vec{a}$. От начала координат отложим равный ему вектор $\overrightarrow{OA}$. Координатами вектора $\vec{a}$ называют координаты точки A. Запись $\vec{a}(x;y)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(x;y)$. Числа x и y называют соответственно первой и второй координатами вектора $\vec{a}$.

Подобную процедуру можно проделать с любыми заданными на плоскости векторами, а затем перейти от действий с векторами к действиям с их координатами.

Равные вектора имеют равные координаты.

3) Сумма и разность векторов определяются как сумма и разность соответствующих координат.

4) Умножение ненулевого вектора на число определяется через умножение на это число координат вектора.

5) Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_x;a_y)$ и $\vec{b}(b_x;b_y)$ определяется как число $a_x b_x + a_y b_y$.

Заключение. В заключение сформулируем основные результаты работы и краткие выводы по ним.

1. В работе представлена история обучения векторному исчислению в практике российской общеобразовательной школы с середины XX века до нащих дней.

В центральном документе стандартов второго поколения «Фундаментальное ядро содержания общего образования» косвенно определена цель изучения векторов в школьном курсе математики – применение при решении геометрических задач. Эта цель в большей степени, чем другие соображения (научность, современность, фузионизм и пр.), определяет содержание изучения темы «Векторы».

Проведен сравнительный анализ структуры и содержания всех рекомендованных УМК по геометрии на 2019-20 учебный год.

2. Разработаны три методические схемы изучения темы «Векторы» в современном школьном курсе планиметрии на основании систематизации всех выявленных трактовок понятия «вектор» (с указанием потенциальной возможности использовать ту или иную трактовку понятия в учебном процессе): направленный отрезок; свободный вектор; упорядоченная пара точек; пара чисел проекций радиус-вектора на оси координат или коэффициентов его разложения по базисным векторам; параллельный перенос; элемент абстрактного векторного пространства; геометрическое число.

Инвариантность методики изучения векторов при разнообразии подходов к его введению отводит задачам роль основного средства изучения материала по теме «Векторы». В бакалаврской работе выделены и охарактеризованы основные типы задач по теме «Векторы»: учебные задачи векторной алгебры, сформулированные в терминах направленного отрезка; учебные задачи векторной алгебры, сформулированные в координатах; практические задачи.

Результаты исследования будут полезны практикующим и будущим учителям математики, интересующимся методическими проблемами векторной алгебры и аналитической геометрии в общем образовании.

Список использованных источников состоит из 47 наименований.