

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

**Использование эвристик при обучении алгебре в 9 классе**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы

направления 44.03.01 Педагогическое образование (профиль – математическое образование) механико-математического факультета

Бикалиевой Алии Александровны

Научный руководитель

к. п. н., доцент

\_\_\_\_\_

подпись, дата

Т. А. Капитонова

Зав. кафедрой

к. п. н., доцент

\_\_\_\_\_

подпись, дата

И.К. Кондаурова

Саратов 2019

**Введение.** Современная жизнь насыщена и динамична, добиться успеха лишь тот, кто быстро и своевременно сумеет найти правильное решение проблемы в нестандартной ситуации, поэтому требованием сегодняшнего дня является всесторонне развитая, образованная, творческая личность.

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования предметные результаты изучения предметной области «Алгебра» должны обеспечивать обучающимся «развитие математической интуиции (догадки)», что позволяет в дальнейшем открывать что-то нового в учебном процессе через использование эвристических приемов.

Эвристические приемы обучения исследовались:

– психологами (В. Н. Пушкин, Ю. Н. Кулюткин, В. И. Андреев, В. И. Крутецкий и др.), которые считали эвристику разделом психологии, изучающим творческое или продуктивное мышление;

– философами (Д. А. Поспелов, В. П. Бранский, А. Ф. Кудряшова и др.), приписывающие термин «эвристический» таким правилам или утверждениям, которые способствуют открытию нового;

– математиками-методистами (В. М. Брадис, Ю. М. Колягин, Д. Пойа, Е. Е. Семенов и др.), которыми введено понятие эвристического метода, в ходе которого учитель вместо изложения учебного материала в готовом виде подводит учащихся к переоткрытию теорем, их доказательств, к самостоятельному формулированию определений, к составлению и решению задач. В частности исследования М. М. Фоминых посвящено педагогическим условиям развития эвристического мышления при обучении математике студентов нематематических специальностей; Г. Абдулаев изучал проблему развития поисковой деятельности учащихся при изучении математики в 7-9 классах; С. Р. Мугаллимова исследовала формирование эвристических приемов у учащихся в процессе обучению задач векторным методом.

Вопросам использования эвристических приемов на практике посвящены работы учителей математики, в частности З. Ж. Якубалиева,

Ю.В. Джакубалиева исследовали использование эвристик при решении задач в натуральных числах; Н. М. Семынина рассматривала эвристические приёмы обучения решению нестандартных задач. И. Н. Богатырёвой описано применение некоторых эвристических приёмов при решении задач в 5-6 классах. Особо следует отметить, что Е.И. Скафа исследовала конструирование методической системы эвристического обучения математическим курсам в средней и высшей школе.

Не смотря, на все выше сказанное, на наш взгляд, вопросам использования эвристических приемов на уроках алгебры в 9 классах уделено недостаточно внимания, что обуславливает актуальность темы исследования.

Цель работы: охарактеризовать понятие «эвристика», описать методические рекомендации по организации эвристической деятельности учащихся 9 класса на уроках алгебры и разработать программу факультативного курса «Эвристики в алгебре».

Задачи работы:

- описать: понятие «эвристика», особенности эвристических приемов, классификацию эвристических приемов;
- разработать методические рекомендации по организации эвристической деятельности учащихся на уроках алгебры в 9 классе и программу факультативного курса «Эвристики в алгебре»;
- апробировать результаты исследования.

Методы исследования, используемые в работе: изучение нормативных документов; анализ научной и учебно-методической литературы; изучение и обобщение опыта работы учителей математики; разработка и апробация методических материалов, анкетирование.

Структура работы: титульный лист; введение; две главы («Теоретические аспекты использования эвристик при обучении алгебре в 9 классе»; «Практические аспекты использования эвристик при обучении алгебре в 9 классе»); заключение; список использованных источников.

**Основное содержание работы.** В первой главе «Теоретические аспекты использования эвристик при обучении алгебре в 9 классе» рассмотрены понятия «эвристика», «эвристический прием» и представлена классификация эвристических приемов.

Изучение эвристики как общей методологии творчества и как системы частных приемов решения задач является необходимым компонентом системы современного школьного образования.

Термин «эвристика» («heurisko») в переводе с греческого означает «отыскиваю», «нахожу», «открываю». В современных энциклопедических словарях дается несколько толкований понятию «эвристика»: 1) это наука, изучающая продуктивное творческое мышление (эвристическая деятельность); 2) это методы, которые используются в процессе открытия нового (эвристические методы); 3) это приемы, облегчающие и упрощающие решение задач, не зная его алгоритма (эвристические приемы); 4) метод обучения (сократические беседы) или коллективного решения проблем.

Первое значение «эвристики» применяется в качестве названия науки. Понятие «эвристика» рассматривается несколькими науками и разными исследователями с различных позиций и поэтому трактовки данного понятия многообразны. В психологии эвристика понимается как совокупность присущих человеку механизмов, с помощью которых порождаются процессы построения нового действия, направленного на достижение цели в новой для построенной системы ситуации. Философы термин «эвристика» описывают как науку, которая способствует открытию нового в знании и деятельности человека. Использование эвристик также можно встретить и в кибернетике. Эвристики понимаются как метаспособы или метапланы, с помощью которых отыскивают конкретные способы решения задачи.

Второе значение «эвристики» как метода открытия нового (эвристические методы). Эвристические методы – это «система принципов и правил, которые задают наиболее вероятностные стратегии и тактики деятельности, стимулируют интуитивное мышление в процессе решения, генерирование

новых идей и тем самым значительно повышают эффективность решения определенного класса творческих задач».

Третье значение «эвристик» как приема, облегчающие и упрощающие решение задач (эвристические приемы). В. И. Андреев рассматривает эвристики как «такие общедидактические приемы, целенаправленное применение которых активно формирует у учащихся стратегию рационального поиска отдельных этапов решения учебных проблем, учебно-исследовательских задач».

Четвертое значение эвристики – это учения Сократа (469-399 гг. до н.э.). С помощью особых вопросов и рассуждений он помогал собеседнику самостоятельно приходить к постановке или решению проблемы, в результате истина открывалась не только ученику, но и учителю.

Задача педагога – помогать ученику самостоятельно решать задачи, навести ученика на самостоятельное открытие. Д. Пойа формулирует общие правила, лежащие в основе поиска решений (они систематизированы в специальной таблице в книге «Как решать задачу» [6]), и описывает на примерах структуру некоторых конкретных эвристических приемов.

Таким образом, эвристики – это:

- догадки, основанные на общем опыте решения задачи;
- метод открытия нового (истины), в том числе метод проб и ошибок;
- прием или совокупность логических приемов по решению задач, выполнению теоретических исследований, конструированию моделей;
- прием отыскания конкретных способов решения задачи средствами электронной техники;
- метод (совокупность методов) обучения;
- деятельность, характеризующая процесс продуктивного мышления, вдохновленного исследования;
- раздел психологии;
- научная область, изучающая специфику творческой деятельности;

- наука о творчестве;
- сократические беседы.

Цель эвристики – исследовать методы, приемы и правила, используемые для осуществления открытия и поиска решения задачи.

Функциями эвристик, по мнению Е. Е. Семенова, являются:

- 1) средство мотивации при выборе, предпочтении тех или иных действий;
- 2) средство выявления общности решаемых математических задач, их единства. Систематизация изученного и изучаемого материала;
- 3) способ установления аналогии;
- 4) способ приобретения знаний, их «добывания»;
- 5) источник внутренней установки на познавательную деятельность;
- 6) способ организации диалога (делают его более продуктивным);
- 7) способ подведения обучаемого к математическому открытию.

Таким образом, роль эвристики в разных аспектах важна и следует использовать все ее функции в практике обучения математики, а в частности алгебре. Поэтому методической копилке учителя должны присутствовать такие методы, приемы, средства и формы, с помощью которых он раскроет ученику суть эвристик и сформирует такие приемы деятельности, которые можно отнести к эвристическим, что способствовало бы развитию творческой личности школьников.

Также в первой главе рассматриваются понятие «эвристические приемы» и их классификация.

Нет единого толкования понятия эвристического приема. В частности С. Р. Мугаллимова эвристический прием понимает, как «преобразующее действие, применение которого позволяет найти ключевую идею для решения проблемной задачи и свести ее решение к использованию уже известных алгоритмов. Эвристические приемы – приемы, которые сформировались в ходе решения одних задач и более или менее сознательно переносятся на другие. Они дают самое общее направление мысли, не гарантируя получение нужного результата».

В своих исследованиях С. Р. Мугаллимова приводит шесть видов эвристических приемов: трансляция, реверсия, варьирование объекта, варьирование среды, индукция, акцентуализация.

Е. Скафа эвристические приемы характеризует, как «поиск решения новых проблем, открытие новых для ученика знаний, направляют мысль на проникновение в суть содержания, включают в процесс рассуждения наглядно-образное мышление, облегчающее восприятие описываемой в условии задачи ситуации».

Е. Скафа эвристические приемы разделяет на общие, специфические и базовые приемы решения задач. Общие приемы включают в себя: анализ, синтез, сравнение, абстрагирование, обобщение, классификация, систематизация, аналогии и др. К специфическим приемам относит: подведение под понятие, выведение следствий и др. К базовым приемам относит: рассмотрение предельного случая, введение вспомогательного элемента, выделение подзадач, прием моделирования, принцип Дирихле, принцип симметрии, переход к равносильной задаче, метод малых изменений, метод обобщения плюс индукция и др.

На основе данной классификации Е. Скафы, можно рассмотреть взаимосвязь эвристических приемов и задачного материала, направленного на формирование приемов эвристической деятельности.

В нашей работе под эвристикой будем понимать универсальные приемы для нахождения стратегии решения учебно-исследовательских задач, для совершения некоторого «открытия». Поэтому будем принимать эвристические приемы и эвристики, как синонимами

Вторая глава «» содержит методические рекомендации по организации эвристической деятельности учащихся на уроках алгебры в 9 классе, программу факультативного курса «Эвристики в алгебре». Описаны ход и результаты апробации разработанных методических материалов.

В ходе анализа содержания курса алгебры 9 класса были выделены и отобраны темы (Функции и их свойства. Квадратный трехчлен. Квадратичная

функция. Уравнение с одной переменной. Арифметическая прогрессия. Геометрическая прогрессия) и задания, при решении которых будут использоваться некоторые эвристические приемы (эвристики). Используемые эвристики: «выделение квадрата двучлена», «введение параметра», «перебор», «задачи теоретического характера», «модификация», «введение вспомогательного неизвестного» и др.

Рассмотрим примеры задач, при решении которых будет применяться эвристика.

Эвристика «выделение квадрата двучлена».

Задача. Найти множество значений функции  $f(x) = \sqrt{2x - x^2 - 1}$ .

Решение. Преобразуем подкоренное выражение  $f(x) = \sqrt{2x - x^2 - 1} = \sqrt{-(x^2 - 2x + 1)} = \sqrt{-(x - 1)^2}$ . Подкоренное выражение должно быть неотрицательным  $-(x - 1)^2 \geq 0$ , но, так как,  $(x - 1)^2 \geq 0$ , получаем систему двух неравенств  $\begin{cases} (x - 1)^2 \geq 0 \\ -(x - 1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 \geq 0 \\ (x - 1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

Таким образом, множество значений функции  $f(x) = \sqrt{2x - x^2 - 1}$  состоит из одной точки:  $f(1) = \sqrt{2 \cdot 1 - 1^2 - 1} = 0$ .

Ответ.  $E(f) = \{0\}$ .

Эвристика «задачи теоретического характера».

Задача. Докажите, что квадратный трехчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  имеет два различных корня, если существует такое число  $\alpha$ , что  $\alpha f(\alpha) < 0$ . При этом один корень меньше числа  $\alpha$ , а другой больше.

Доказательство. По условию  $\alpha f(\alpha) < 0$ . Возможны два случая:

- 1)  $a > 0, f(\alpha) < 0$ ;
- 2)  $a < 0, f(\alpha) > 0$ .

В первом случае (при  $a > 0$ ) ветви параболы, заданной формулы  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , направлены вверх. Чтобы  $f(\alpha)$  было отрицательным, необходимо, чтобы парабола пересекала ось  $x$  в двух точках, т. е. трехчлен  $f(x)$  имел два различных корня, один из которых меньше числа  $\alpha$ , а другой больше.



Во втором случае (при  $a < 0$ ) ветви параболы  $f(x) = ax^2 + bx + c$  направлены вниз. Чтобы  $f(\alpha)$  было положительным, необходимо, чтобы парабола пересекала ось  $x$  в двух точках  $x_1$  и  $x_2$ , где  $x_1 < \alpha$ ,  $x_2 > \alpha$ . Таким образом, трехчлен  $f(x)$  и в этом случае должен иметь два различных корня:  $f(x_1) = 0$  и  $f(x_2) = 0$ . Утверждение доказано.

Эвристика «модификация».

Задача. Докажите, что значение выражения  $n^5 - 5n^3 + 4n$  делится на 12 при любых натуральных  $n$ .

Решение.  $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 4)(n^2 - 1) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ . Мы получили произведение пяти последовательных натуральных чисел, которое всегда кратно  $120(120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)$ . Утверждение доказано.

Эвристика «введения вспомогательного неизвестного».

Задача. Найти множество значений функции  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ .

Решение. Обозначим  $\frac{1-x^2}{1+x^2} = p$  и рассмотрим равенство как уравнение с неизвестным  $x$  и параметром  $p$ .

Имеем  $px^2 + p = 1 - x^2$ ,  $x^2(p + 1) + p - 1 = 0$  – квадратное уравнение (при  $p \neq -1$  относительно  $x$ ). Квадратное уравнение имеет действительные решения тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D = -4(p^2 - 1) = 4(1 - p^2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p \neq -1 \\ |p| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < p \leq 1.$$

Ответ.  $E(f) = (-1; 1]$ .

Задача. Из  $A$  в  $B$  и из  $B$  в  $A$  выехали одновременно два автомобиля и встретились через 3 часа. Первый автомобиль пришел в  $B$  на 1,1 час позже, чем второй в  $A$ . Найдите отношение скоростей автомобилей.

Пусть скорость первого автомобиля  $v_1$  км/ч, скорость второго –  $v_2$  км/ч. Первый автомобиль до встречи прошел  $3v_1$  км, второй  $3v_2$  км. После встречи первый автомобиль шел  $\frac{3v_2}{v_1}$  часов, второй  $\frac{3v_1}{v_2}$  часов. По условию:

$$\frac{3v_2}{v_1} - \frac{3v_1}{v_2} = \frac{11}{10}$$

Для решения данного уравнения введем новую переменную, обозначив  $\frac{v_2}{v_1} = x$ . Тогда  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{x}$ ,  $3x - \frac{3}{x} = \frac{11}{10}$ , или  $30x^2 - 11x - 30 = 0$ . Решив уравнение, выясняем, что условию задачи удовлетворяет лишь один положительный корень  $x = \frac{6}{5}$ ,  $\frac{v_2}{v_1} = \frac{6}{5}$ .

Ответ. Отношение скоростей равно 6:5.

Представлена разработка программы факультативного курса «Эвристики в алгебре» для 9 класса. Каждое занятие, а также все они в целом направлены на то, чтобы развить интерес обучающихся к предмету, познакомить их с новыми идеями и приемами, расширить представление об изучаемом в основном курсе материале.

Факультативный курс «Эвристики в алгебре» для учащихся 9 класса рассчитан на 17 часов (один раз в неделю). В курсе применяются следующие эвристики: «выделение квадрата двучлена», «введение вспомогательного неизвестного», «перебор», «задачи теоретического характера», «модификация».

Задачи курса: систематизация, обобщение и углубление учебного материала, изученного на уроках алгебры в 7–9 классах; развитие познавательного интереса обучающихся к изучению алгебры; продолжение работы по ознакомлению учащихся с эвристиками (эвристическими приемами) поиска решения задач; развитие логического мышления и интуиции учащихся. Тематическое планирование факультативного курса представлено в таблице 1.

Таблица 1 – Тематическое планирование

№ занятия	Тема занятия	Кол-во часов
1-2	Вводное занятие	2ч
3-4	Выражения и их преобразования	2ч
5-7	Уравнения и системы уравнений	3ч
8-10	Неравенства и системы неравенств	3ч
11-12	Наибольшее и наименьшее значение функции	2ч
13-14	Прогрессии	2ч
15-16	Элементы комбинаторики и теории вероятностей	3ч
17	Итоговое занятие	1ч

В ходе занятий проводилось анкетирование учащихся, что позволило сделать следующие выводы:

1. Если на начальном периоде организация эвристической деятельности на уроках использовалась сократическая беседа, т.е. наводящие вопросы учителя, то к концу учебного года некоторые учащиеся (3 девятиклассника из 7) самостоятельно применяли эвристики, что показывает положительный эффект разработанных методических материалов.

2. На вопрос о том, хотели бы вы продолжить изучение эвристических приемов во внеурочное время, положительно ответило 5 учащихся. С учетом их пожеланий, была разработана программа факультативного курса «Эвристики в алгебре».

**Заключение.** Основные результаты бакалаврской работы:

1. На основе анализа психолого-педагогической и методико-математической литературы рассмотрены понятия «эвристический прием» и классификация эвристических приемов.

Под эвристическим приемом понимается преобразующее действие, позволяющее составить алгоритм решения проблемной задачи.

Эвристические приемы разделяют на общие, специфические и базовые. К общим приемам относятся: анализ, синтез, сравнение, абстрагирование, обобщение, классификация, систематизация, аналогии и др. К специфическим приемам относятся: подведение под понятие, выведение следствий и др. К базовым приемам относятся: рассмотрение предельного случая, введение вспомогательного элемента, выделение подзадач, прием моделирования, принцип Дирихле, принцип симметрии, переход к равносильной задаче, метод малых изменений, метод обобщения плюс индукция и др.

2. В ходе анализа учебно-методической литературы по курсу Алгебра-9 выделены задачи, при решении которых используются различные эвристические приемы (эвристики). В учебниках алгебры такие задачи представлены в блоках «Задания повышенного уровня». Решая задачи повышенной трудности на уроках алгебры, учащиеся знакомятся с такими

эвристиками как «выделение квадрата двучлена», «введение параметра», «перебор», «задачи теоретического характера», «модификация», «введение вспомогательного неизвестного» и др.

3. Разработана программа факультативного курса «Эвристика в алгебре» для учащихся 9 класса, что позволяет использовать эвристики не только на уроках, но и во внеурочное время.

4. Опытнo-экспериментальная проверка разработанных материалов проходила на базе МОУ-СОШ п. Осиновский Марксовского района Саратовской области. Задачи, рассмотренные в практической части позволяют мотивировать учащихся к дальнейшему использованию эвристических приемов не только на уроках алгебры, но и во внеурочное время.

По материалам бакалаврской работы опубликованы две статьи: «Использование эвристических приемов в курсе алгебры 9 класса»; «Использование эвристик при решении историко-математических задач».

Материалы бакалаврской работы могут быть полезны учителям математики, работающим в 9 классах общеобразовательных школ, лицеев, гимназий и могут быть использованы как на уроках, так и во внеурочное время.