МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Задачи «в натуральных числах» школьного курса математики

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы

направления 44.03.01 – «Педагогическое образование (профиль – математическое образование)» механико-математического факультета

Чавычаловой Анастасии Александровны

Научный руководитель
ст. преподаватель ________________ С. В. Лебедева

Зав. кафедрой
к. п. н., доцент ________________ И. К. Кондаурова

Саратов 2019

Введение. Задачи, сформулированные на множестве натуральных чисел и имеющие решение на этом множестве, в школьном курсе математики занимают особое место. С них начинается знакомство школьников с математикой; одни позволяют усвоить теоретические положения школьного курса математики и отработать наиболее значимые алгоритмы, другие – выполняют познавательную функцию (помогают исследовать многие теоретико-числовые закономерности); третьи – формируют банк олимпиадных задач по математике. Они строги и занимательны, просты и сложны одновременно, они позволяют формировать и поддерживать интерес к предмету и уверенность в своих силах. Их роль и значение трудно переоценить. Они – объект нашего исследования.

Вопросами элементарной теории чисел, так или иначе, занимались все авторы учебников, задачников и методических пособий по арифметике для средних школ: И. К. Андронов, М. И. Башмаков, В. М. Брадис, Е. А. Бунимович, Н. Я. Виленкин, Г. В. Дорофеев, В. В. Козлов, А. П. Киселёва, А. Г. Мерзляк, А. Г. Мордкович, Г. К. Муравин, С. М. Никольский, Л. Г. Петерсон, И. Ф. Шарыгин и др.

Проблемой теоретико-числовой подготовки школьников (изучения элементарной теории чисел и её приложений к решению практических задач):

занимались: Л. Ф. Магницкий, А. П. Киселёв, Я. И. Перельман, А. Я. Хинчин, Г. Н. Берман, Н. Н. Воробьёв, В. Д. Чистяков, В. Ф. Серпинский, И. Н. Шевченко и др.

современные педагоги-математики: Т. С. Волкова, Ю. С. Гапонова, Т. Ю. Заяц, С. В. Ядрышникова, М. Е. Сангалова, С. В. Лебедева, М. Ю. Сизова, Е. П. Гринько, Б. А. Кордемский и др.

Достаточное внимание теоретико-числовой подготовке уделялось в своё время в периодических изданиях: в журнале «Математика в школе», в газете/журнале «Математика», в журнале «Квант».

Несмотря на имеющиеся исследования и публикации, посвящённые теоретико-числовым задачам и другим задачам в натуральных числах в математическом образовании школьников, целостного изложения теории и практики задач в натуральных числах в современной методической литературе не представлено; это определило цель и задачи бакалаврской работы.

Цель бакалаврской работы – выявить развивающий потенциал задач в натуральных числах.

Задачи: 1) Уточнить определение «задачи в натуральных числах». 2) Рассмотреть классификации задач в натуральных числах, основные методы их решения. 3) Описать методику обучения решению основных классов задач в натуральных числах, обладающих высоким развивающим потенциалом.

Методы исследования: анализ научной, научно-методической и методической литературы, теоретическое обобщение и системный анализ; анализ и обобщение педагогического опыта; педагогические проектирование.

Структура работы: титульный лист; введение; две главы («Задачи «в натуральных числах» в содержании математического образования школьников»; «Основные подходы к решению задач «в натуральных числах»»); заключение; список использованных источников.

Основное содержание работы. Первая глава посвящена решению первой и второй задач бакалаврской работы. В рамках бакалаврской работы под задачей «в натуральных числах» мы понимаем задачу, сформулированную на множестве натуральных чисел и имеющую решение на этом же множестве.

Было выделено 4 класса задач в натуральных числах школьного курса математики 5-11 классов (классификация по дидактическим целям с учётом структуры рассматриваемых задач): *учебные математические задачи*, позволяющие усвоить теоретические положения школьного курса математики и отработать наиболее значимые алгоритмы; *развивающие задачи*, позволяющие применить знания элементарной теории чисел в ситуации приближенной к реальной *(развивающие практические)* и к решению полуалгоритмических математических задач *(развивающие математические)*; *исследовательские и познавательные задачи*, позволяющие вести изучение теоретико-числовых закономерностей; *занимательные (математические и практические) задачи*, формирующие банк олимпиадных задач по математике.

Количественные учебные и развивающие, качественные репродуктивные математические задачи и практические с приведённым условием задачи в натуральных числах составляют содержание модуля «Элементарная теория делимости» школьного курса математики (5/6 классы).

Примером учебной математической задачи может служить задача № 13: «Запишите все двузначные числа, кратные 19, все трёхзначные числа, кратные 105» из учебника математики для 6 класса (А.Г. Мерзляк и др.). Пример развивающей задачи из того же учебника – № 30: «К однозначному числу дописали одну цифру, в результате чего оно увеличилось в 41 раз. Какую цифру и к какому числу дописали?»

Пример практической задачи из того же учебника – задача № 62: «В школе работают два ночных охранника – Иван Иванович и Пётр Петрович. Они дежурят по очереди с вечера до утра следующего дня. Иван Иванович заступил на дежурство 1 сентября, а Пётр Петрович – 2 сентября. Кто из них заступит на дежурство 18 сентября? 29 сентября? 1 октября? 30 октября? 31 октября? По каким числам– чётным или нечётным – будет дежурить Иван Иванович в ноябре? Кто из них будет дежурить на Новый год?»

Развивающие количественные и качественные репродуктивные математические задачи из учебников А.Г. Мерзляка за 7-9 класс:

№ 331, 7 класс: Чему равен остаток при делении на 9 значения выражения $(16n + 8) – (7n + 3)$, где n – произвольное натуральное число?

№ 665, 8 класс: Найдите натуральное число, квадрат которого на 42 больше данного числа.

№ 810, 9 класс: Найдите сумму всех двузначных чисел, которые не делятся нацело ни на 3, ни на 5.

В качестве примера развивающей практической задачи возьмем упражнение из учебника А.Г. Мерзляка за 8 класс:

№ 682: В футбольном турнире было сыграно 36 матчей. Сколько команд участвовало в турнире, если каждая команда сыграла по одному разу с каждой из остальных команд?

Теоретико-числовая задача из курса алгебры и начал анализа 10-11 классов С.М. Никольского:

№ 1.44: Докажите, что:

а) $7^n + 9$ делится на 8 для любого нечетного натурального n;

б) $3^n + 7$ делится на 8 для любого четного натурального n.

К развивающим задачам можно отнести старинные задачи (историко-математические и историко-педагогические математические) и задачи с использованием историко-краеведческого и фольклорного материала. Встречаются такие задачи и в школьных учебниках. В качестве примера приведём задачу из учебника 9 класса А.Г. Мерзляка:

№ 779 (Старинная египетская задача): Сто мер хлеба надо разделить на пять человек так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвёртый больше третьего и пятый больше четвёртого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше, чем трое последних. Сколько надо дать каждому?

Приведём пример задачи в натуральных числах из демоверсий ЕГЭ (развивающая математическая):

ЕГЭ-2018, базовый уровень: Найдите трёхзначное число, сумма цифр которого равна 20, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Особенностями решения учебных математических и развивающих математических и практических задач в натуральных числах являются:

1) возможность решения методом исчерпывающих проб;

2) поиск закономерностей;

3) возможность решения развивающих практических задач практическим методом, выполняя практические (реальные или воображаемые) действия с объектами или их моделями;

4) помимо теоретико-числового решения существует алгебраическое решение для задач, относящихся к алгебраическим содержательно-методическим линиям школьного курса математики.

Пример исследовательской задачи из учебника 6 класса А.Г. Мерзляка:

№ 51. 1) Запишите шесть первых натуральных чисел, кратных 100. Обратите внимание на две последние цифры этих чисел. Сформулируйте признак делимости на 100.

2) Запишите восемь первых натуральных чисел, кратных 25. Обратите внимание на две последние цифры этих чисел. Сформулируйте признак делимости на 25.

Пример исследовательской задачи для 9 класса А. Г. Мерзляка:

№ 809. Докажите, что если сумма n первых членов последовательности вычисляется по формуле $S_n = n^2 - 3n$, то эта последовательность является арифметической прогрессией. [Найдите первый член и разность этой прогрессии][1].

Пример исследовательской задачи учебника алгебры и начал для 10 класса С. М. Никольского – № 1.105: «Найдите семь пифагоровых треугольников».

Познавательные задачи отличаются от исследовательских «нехваткой» теоретических, операциональных или практических (о способах деятельности) знаний. Для теоретико-числовых задач школьного курса математики базового уровня это, как правило, задачи на применение алгоритма Евклида и теории сравнений по модулю.

Задачи «в натуральных числах» из года в год включаются в олимпиады различных уровней для учащихся школ.

– *качественные продуктивные развивающие математические задачи*, например: « Последняя цифра в записи натурального числа в 2016 раз меньше самого числа; найдите все такие числа» [Всероссийская олимпиада школьников по математике, школьный этап, 2016-17 уч. г., 8 класс].

– *развивающие практические с неприведённым условием задачи*, например, «Сумма двух целых чисел равна S. Маша умножила левое число на

[1] Это требование следует отнести к классу учебных задач после того, как будет доказано основное утверждение.

целое число *a*, правое – на целое число *b*, сложила эти произведения и обнаружила, что полученная сумма делится на *S*. Алёша, наоборот, левое число умножил на *b*, а правое – на *a*. Докажите, что и у него аналогичная сумма разделится на *S»* [Всероссийская олимпиада школьников по математике, муниципальный этап, 2016-17 уч. г., 10 класс].

– *занимательные задачи, например, математические ребусы*, представленные на Международной дистанционной олимпиаде по математике «Математические ребусы» (1 этап, 2018 г.): «Замените буквы на цифры так, чтобы получилось равенство: ОДИН + ОДИН = МНОГО. Чему равно МНОГО»?

К методам решения олимпиадных задач можно отнести все методы решения развивающих и исследовательских задач.

Во второй главе рассмотрены пять основных подходов к решению задач в натуральных числах, обладающих высоким развивающим потенциалом. Каждый подход подробно охарактеризован и проиллюстрирован на ряде примеров каждого из выделенных классов задач.

Покажем на примере задачи № 30 из учебника А.Г. Мерзляка 6 класса: «К однозначному числу дописали одну цифру, в результате чего оно увеличилось в 41 раз. Какую цифру и к какому числу дописали?»; – сущность подхода решения учебных и развивающих задач, основанного на методе исчерпывающих проб.

Всего двузначных натуральных чисел – 90, поэтому можем проверить их все на соответствие условию и требованию задачи. Для алгоритмизации перебора нам нужно разработать таблицу – информационную модель решения задачи – таблица 1.

Ответ. Если к числу 1 дописать слева цифру 4, то полученное число 41 будет в 41 раз больше исходного, то же самое получится, если к числу 2 дописать слева цифру 8.

Таблица 1. Информационная модель решения задачи № 30

Число	Исходное число	Дописанная цифра	Проверка условия: «в результате чего оно увеличилось в 41 раз»
10	1	0	10 : 1 = 10
11	1	1	11 : 1 = 11
12	1	2	12 : 1 = 12
	2	1	12 : 2 = 6
13	1	3	13 : 1 = 13
	3	1	13 не делится нацело на 3
…			
41	4	1	41 не делится нацело на 4
	1	4	41 : 1 = **41**
…			
82	8	2	82 не делится нацело на 8
	2	8	82 : 2 = **41**
…			
99	9	9	99 : 9 = 11

Приведем пример решения исследовательской задачи из учебника А.Г. Мерзляка за 6 класс:

№ 51. (1) Запишите шесть первых натуральных чисел, кратных 100. Обратите внимание на две последние цифры этих чисел. Сформулируйте признак делимости на 100. (2) Запишите восемь первых натуральных чисел, кратных 25. Обратите внимание на две последние цифры этих чисел. Сформулируйте признак делимости на 25.

Задача 51.1. Проведем исследование (по индукции); выпишем шесть первых чисел, кратных 100 и подчеркнём две последние цифры этих чисел:

1<u>00</u>, 2<u>00</u>, 3<u>00</u>, 4<u>00</u>, 5<u>00</u>, 6<u>00</u>, …

Сформулируем, глядя на полученные числа, признак делимости на 100: если число оканчивается двумя нулями, то оно делится на 100.

Проверим на нескольких числах:

15437800 : 100 = 154378

154378000 : 100 = 1543780

1543780000 : 100 = 15437800

Задача 51.2. Проведем исследование (по индукции); выпишем восемь первых чисел, кратных 25 и подчеркнём две последние цифры этих чисел; при повторении этих цифр будем начинать новый ряд:

25,   50,   75,   100,

125,   150,   175,   200,   … запишем ещё несколько чисел:

225,   250,   275,   300,   …

Сформулируем, глядя на полученные числа, признак делимости на 25:

– если число оканчивается на 25, 75 или два нуля, то оно делится на 25;

– если число, составленное из двух последних цифр, делится на 25, то и всё число делится на 25.

С учётом первого исследования можно сформулировать следующее утверждение: если число делится на 100, то оно делится на 25.

При решении олимпиадных задач можно использовать все подходы к решению, описанные в работе. Приведем пример решения олимпиадной задачи:

Задача 1. Последняя цифра в записи натурального числа в 2016 раз меньше самого числа; найдите все такие числа [Всероссийская олимпиада школьников по математике, школьный этап, 2016-17 уч. г., 8 класс];

Шаг 1. Анализируем условие.

Последняя цифра в записи натурального числа в 2016 раз меньше самого числа – это значит, что речь идёт о числе с не менее чем 4 и не более чем 5 цифрами.

Шаг 2. Выбираем метод/способ/приём решения.

Можно попробовать метод исчерпывающих проб.

Пусть число заканчивается 1, тогда оно должно быть в 2016 раз больше 1, то есть равным 2016. Но в этом случае получаем противоречие: с одной стороны последняя цифра равна 1, с другой – 6. Цифра 1 не подходит.

Пусть число заканчивается 2, тогда оно должно быть в 2016 раз больше 2, то есть равным **4032**. Противоречия нет. Мы нашли первое число, удовлетворяющее условию задачи.

Пусть число заканчивается 3, тогда оно должно быть в 2016 раз больше 3, то есть равным 6048; – получаем противоречие: с одной стороны последняя цифра равна 3, с другой – 8. Число не кончается на 3.

Пусть число заканчивается 4, тогда оно должно быть в 2016 раз больше 4, то есть равным **8064**. Противоречия нет. Мы нашли второе число, удовлетворяющее условию задачи.

Произведение 5 на 2016 оканчивается 0; 7 на 2016 – оканчивается на 2; 9 на 2016 – оканчивается на 4, поэтому число не может заканчиваться 5, 7 или 9. Оно также не может заканчиваться 0, так как в отношении 0 не применимо сравнение в n раз.

Пусть число заканчивается 6, тогда оно должно быть в 2016 раз больше 6, то есть равным **12096**. Противоречия нет. Мы нашли третье число, удовлетворяющее условию задачи.

Пусть число заканчивается 8, тогда оно должно быть в 2016 раз больше 8, то есть равным **16128**. Противоречия нет. Мы нашли четвёртое число, удовлетворяющее условию задачи.

Шаг 3. Оптимизируем решение.

Обоснуем достаточность проверки на соответствие условию задачи только чётных цифр. Составим теоретико-числовую модель задачи. Пусть x – последняя цифра числа, тогда $2016 \cdot x$ должно оканчиваться на x. Поскольку $2016 \cdot x$ – чётное число, то оно оканчивается на чётную цифру, то есть x – чётно.

Шаг 4. Доработаем теоретико-числовую модель, представив число суммой разрядных слагаемых: $2016 \cdot x = y \cdot 10 + x$, где x – цифра, а y – натуральное число. Упростим модель: $2015 \cdot x = y \cdot 10$ или $403 \cdot x = y \cdot 2$. Это значит, что x – чётная цифра (этот факт нам уже известен), а y делится на 403.

Шаг 5. Пробуем новый способ – ищем y:

$403 \cdot 2 = 2 \cdot y$	$y = 403$	$403 \cdot 10 + 2 = 4032$
$403 \cdot 4 = 2 \cdot y$	$y = 2 \cdot 403$	$806 \cdot 10 + 4 = 8064$
$403 \cdot 6 = 2 \cdot y$	$y = 3 \cdot 403$	$1209 \cdot 10 + 6 = 12096$
$403 \cdot 8 = 2 \cdot y$	$y = 4 \cdot 403$	$1612 \cdot 10 + 8 = 16128.$

Заключение. Основные выводы и результаты бакалаврской работы:

1. Уточнено определение «задачи в натуральных числах», под которой мы понимаем задачи школьного курса математики, сформулированные на множестве натуральных чисел и имеющие решение на этом множестве.

2. Проведена классификация задач в натуральных числах и описаны основные методы решения задач каждого класса.

3. Описана методика обучения решению основных классов задач в натуральных числах, обладающих высоким развивающим потенциалом – на конкретных примерах продемонстрированы пять основных подходов к решению учебных математических и развивающих математических и практических задач в натуральных числах. В работе продемонстрированы возможности расширения учебных и развивающих задач до исследовательских посредством цепочки проблемных вопросов, и исследовательских – до познавательных посредством изменения места задачи в учебном процессе. Подчёркивается значимость практического метода в развитии мышления и речи (в том числе математической).