

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Балашовский институт (филиал)

Кафедра математики

**МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ
ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 151 группы
направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя
профилями подготовки)»,
профили «Математика и информатика»,
факультета математики экономики и информатики
Алесик Любови Викторовны.

Научный руководитель
доцент кафедры математики,
кандидат педагогических наук,
доцент _____

(подпись, дата)

В.В. Кертанова

Зав. кафедрой математики
кандидат педагогических наук,
доцент _____

(подпись, дата)

О.А. Фурлетова

Балашов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность. Понятие оптимизации – это одно из фундаментальных понятий в курсах математики и математическом анализе. Ни одна из областей науки не обходится без задач на оптимизацию или оптимизационный выбор. На них строятся все жизненные задачи. Большая часть жизненных ситуаций состоит как раз из того, как нам сделать так, чтобы меньше потратить, больше заработать, как можно рациональней использовать какие-либо ресурсы. Поэтому преподавание данной темы в школе имеет огромную важность. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования при изучении предмета математики и математического анализа в своей структуре уделяет достаточное внимание задачам оптимизационного характера. Тема «Оптимизационные задачи» нашла свое применение не только на ЕГЭ, но также она способствует будущему трудоустройству школьников. Современная Россия заинтересована в экономическом, промышленном и интеллектуальном подъеме страны. На данном этапе развития отечества на первых местах в списке востребованных профессий на сегодняшний день стоят такие профессии как инженер и специалист информационных технологий, но в тоже время предпринимательство всегда стоит на высокой ступени. А умение решать оптимизационные задачи, возможно, поможет некоторым учащимся пойти в будущем по предпринимательской стезе. Успешное освоение данной темы на этапе среднего образования и успешная сдача ЕГЭ способствует благополучному поступлению в высшее учебное заведение. Задачи на оптимизацию используются на профильном уровне обучения, а значит, дети с высоким уровнем освоения среднего общего образования могут наилучшим образом устроить свой жизненный путь.

Цель бакалаврской работы – обучение методике преподавания темы «Оптимизационные задачи» в курсе средней школы.

Задачи исследования:

1. Изучить учебно-методическую литературу по проблеме

исследования.

2. Рассмотреть особенности изучения темы «Оптимизационные задачи» на уровне средней школы.

3. Рассмотреть структуру пропедевтического курса перед изучением темы «Оптимизационные задачи»

4. Подобрать список задач для подготовки к основному государственному экзамену.

5. Рассмотреть способы решения задачи №17 из ЕГЭ по теме «Оптимизация».

Объект исследования – методика преподавания математики в курсе средней школы.

Предмет исследования – методика преподавания темы «Оптимизационные задачи» в курсе средней школы.

Практическая значимость исследования заключается в возможности использования результатов в учебном процессе.

Структура работы. Бакалаврской работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников и одного приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе «Разработка методов решения оптимизационных задач» рассматривается теоретическая база необходимая для решения задач данного типа. Для начала необходимо поставить саму задачу оптимизации, выяснить для чего они нужны, как применяются и как решаются.

Большую часть своих усилий человек тратит на поиск наилучшего, т.е. оптимального решения поставленной задачи. Задачи подобного рода носят общее название – экономические задачи на оптимизацию или экстремальные задачи. Экстремальные задачи с достаточной полнотой закладывают в сознание учащихся понимание того, как человек ищет, постоянно добивается решения жизненных задач, чтобы получающиеся результаты его деятельности были как можно лучшими. Решая задачи указанного типа, учащиеся видят, с одной стороны, абстрактный характер математических

понятий, с другой – большую и эффективную их применимость к решению практических, жизненных задач. Такая постановка экстремальных задач способствует расширению сферы приложений учебного материала, повышает роль этих задач в осуществлении глубокой цели математического образования школьников – обучать приложению математики в различных областях человеческой деятельности. Экстремальные задачи помогают школьнику ознакомиться с некоторыми идеями и прикладными методами школьного курса математики, которые часто применяются в трудовой деятельности, в познании окружающей действительности. Решение экстремальных задач способствует углублению и обогащению математических знаний учащихся. Через задачи они знакомятся с экстремальными свойствами изучаемых функций. Неоценимую важность постановки экстремальных задач в школьном курсе математики я вижу также в воспитании исследовательской культуры учащихся. Ведь все решения таких задач предлагаются на уровне исследования математической модели и на уровне исследования реальной ситуации с использованием оптимизационных средств.

В первом разделе рассматривается большое количество методов решения задач на оптимизацию таких как: метод перебора, различные методы сокращения отрезка поиска –метод деления отрезка пополам (дихотомии), метод золотого сечения, метод Фибоначчи. А также глубокая, содержательная теоретическая база, которая включает в себя: постановку оптимизационной задачи, экстремальные задачи и их определения, разрешимость задачи оптимизации, оптимизацию функции одной переменной, необходимые и достаточные условия локального экстремума, отыскание наибольшего и наименьшего значений на отрезке, выпуклые функции, численные методы минимизации функции одной переменной, унимодальные функции, а также оптимизацию функции нескольких переменных и необходимые и достаточные условия экстремума.

Задачи отыскания наибольших и наименьших величин часто возникают в науке, технике и экономике. Чтобы применять математические методы для их решения и анализа, необходимо уметь переходить от содержательной к математической постановке задачи. Для этого нужно определить:

- целевую функцию $f(x): R^n \rightarrow R$;
- множество допустимых решений $X \subset R^n$ (допустимое множество) для функции $f(x)$;
- критерий оптимизации $extr \in \{min, max\}$.

Таким образом, тройка вида $(f, X, extr)$ задаёт экстремальную или оптимизационную задачу. Формально математическая постановка выглядит следующим образом:

$$f(x) \rightarrow_{x \in X} extr.$$

Задача оптимизации заключается в следующем: требуется найти $x_0 \in X$ (если он существует), доставляющее экстремальное (минимальное или максимальное) значение целевой функции $f(x)$ на множестве X , а именно для x_0 должно выполняться одно из условий:

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ для всех } x \in X,$$

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ для всех } x \in X$$

Если такого элемента на множестве X не существует, то требуется построить последовательность

$$\{x_k\}, k = 1, 2, \dots, x_k \in X,$$

такую, что выполняется одно из соотношений:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \inf_{x \in X} f(x),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \sup_{x \in X} f(x).$$

Тема «Оптимизация» является одной из самых сложных в школьном курсе. Материал очень обширный и сложный, именно поэтому задачи на оптимизацию есть только на профильном уровне в разделе задач повышенного уровня. Больше количество теоретического материала, представленного в первой главе, не преподносится детям, но учитель данный

материал должен понимать, знать и уметь рассказывать на достаточном уровне. В первой главе рассмотрен теоретический материал, который подводит к понятию оптимизации, а также рассмотрено несколько методов нахождения оптимизационного значения: метод перебора, метод деления отрезка пополам, метод золотого сечения, метод Фибоначчи. Многие из данных методов, при решении задач, обучающимся не пригодятся, но для общего развития и о их существовании знать они обязаны.

Вторая глава исследования посвящена разработке методов преподавания темы «Оптимизация» в средней школе. Не секрет, что оптимизационные задачи являются частью финансовой математики. Поэтому в ходе исследования было выявлено, что для лучшего запоминания решения оптимизационных задач недостаточно знаний только по этой теме. Необходимость изучения всего школьного курса финансовой математики, начиная с восьмого и заканчивая одиннадцатым классом, остро стоит во главе всего изучения методов решения оптимизационных задач. Для того, чтобы обучающиеся легко усвоили методы и способы их решения, нужно повторить весь курс финансовой математики 8-11 классов.

Начать повторение курса необходимо с понятий доли и процента, нахождения процента от числа и числа по его проценту. Учащимся можно предложить задачи 1-8, расположенные ниже, данные упражнения можно решать методом пропорции, рекомендуется перед решением задач повторить данный метод. Примерами таким задач являются следующие задачи:

Задача 1. Найдите 12% от числа 120.

Задача 2. Найдите 120% от числа 12.

Задача 3. Найдите число, если 12% от него равны числу 120.

Задача 4. Найдите число, если 120% от него равны числу 12.

Задача 5. Сколько процентов составляет число 12 от числа 120.

Задача 6. На сколько процентов число 12 меньше числа 120.

Задача 7. Сколько процентов составляет число 120 от числа 12?

Задача 8. На сколько процентов число 120 больше числа 12.

Кроме того, необходимо убедиться, что все обучающиеся понимают, как находить процент от числа и число по его проценту. Также понимают равносильность утверждений «больше на 20%» и «больше в 1,2 раза», «меньше на 75%» и «меньше в 4 раза». Проверить их понимание и осознанное применение можно на примере следующих задач:

Задача 1. Четыре одинаковые футболки дешевле водолазки на 8%. На сколько процентов пять таких футболок будет стоить дороже, чем водолазка.

Задача 2. Семья Петровых ежемесячно вносит плату за воду, домофон и капитальный ремонт квартиры. Если бы капитальный ремонт подорожал на 25%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 10%. Если бы вода подорожала на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 20%. Какой процент от общей суммы платежа составляет домофон?

Задача 3. Число работающих в банке увеличилось на 20%, а фонд заработной платы увеличился на 50%. Если зарплата у всех сотрудников одинаковая, то на сколько процентов он увеличилась?

После того, как учащиеся повторили понятия «процент», «доля», следует вспомнить о том, что такое сложные проценты и вклады. Сложные проценты – проценты, начисляемые на проценты. А также можно проверить остаточные знаний учащихся, решив задачи:

Задача 1. Цена в мае на утюг составляла 1200 рублей. В июне цена увеличилась на 10%, а в июле на 15%. Какой стала цена товара?

Задача 2. Цена на стиральную машину ежемесячно уменьшается на одно и тоже число процентов от предыдущей цены. Определите на сколько процентов каждый месяц уменьшается цена стиральной машины, если в январе она стоила 20000 рублей, а в марте она была продана за 15842 рубля.

Задача 3. Цена на стиральную машину повысилась на 20%, а затем понизилась на 20% от новой величины. Сколько процентов начальной величины составляет конечная величина.

Необходимо убедиться, что учащиеся точно понимают, что проценты называют простыми, если они начисляются только на первоначальную

стоимость, то есть один раз, и сложными, если они начисляются на наращённый капитал, то есть несколько раз. Укрепить понимание данной темы у школьников можно на примере следующих задач:

Задача 1. Катя и Вася положили в банк одинаковые суммы под 9% годовых. Через год Катя, сразу после начисления процентов, доложила на свой счёт 3000 рублей, а еще через год, сразу после начисления процентов, сняла 3000 рублей. Вася, наоборот, через год, сразу после начисления процентов, снял со счёта 3000 рублей, а еще через год, сразу после начисления процентов, положил 3000 рублей. Кто через три года Катя или Вася после первоначального вклада получит больше прибыли и на сколько.

Задача 2. Бизнесмен Орешкин получил прибыль в 2015 году в размере 3000. Каждый следующий год его доход увеличивалась на 400%. Сколько рублей заработал Орешкин в 2018 году?

Также, перед тем как приступить к решению оптимизационных задач, необходимо рассказать учащимся, о кредитах. Не во многих школах данная тема раскрывается широко, и не во многих школах вообще присутствует данная тема в программе. Поэтому, прежде чем приступить к решению задач на кредиты, скорее всего обучающимся придётся объяснить некоторые экономические понятия. Далее предложить обучающимся решить некоторые задачи на кредиты:

Задача 1. Каков платёж можно считать максимальным при доходе 15000 рублей, если платежи по кредиту не должны превышать 40% дохода.

Задача 2. Алексей купил велосипед за 17000 рублей в кредит на год под 15% годовых. Стоимость через год велосипеда составила 19000 рублей. Был ли выгоден кредит?

Задача 3. Алексей купил велосипед за 17000 рублей в кредит на год под 15% годовых. Стоимость через год велосипеда составила 19000 рублей. Был ли выгоден кредит?

Задача 4. Кредит на сумму 30000 рублей выдан на год под 24% годовых. С единовременным погашением кредита вместе с процентами в конце срока. Какова будет переплата?

Задача 5. Кредит на сумму 30000 рублей выдан на год под 1% в день. С единовременным погашением кредита вместе с процентами в конце срока. Сколько денег придется заплатить в конце года?

Задача 6. Кредит на сумму 30000 рублей выдан на два года под 5% в месяц. С единовременным погашением кредита вместе с процентами в конце срока. Сколько денег придется заплатить в конце года?

Задача 7. 30 апреля 2018 года гражданин Свиридов взял в банке 8842000 рублей в кредит под 10% годовых. Кредит имеет следующую систему выплат: 30 апреля каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем гражданин платит банку определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма платежа, чтобы гражданин полностью выплатит кредит за три года.

Задача 8. Кредит на сумму 30000 рублей выдан на полгода под 24% годовых. С единовременным погашением кредита вместе с процентами в конце срока. Какова будет переплата?

После того, как учащиеся повторили весь курс финансовой математики за 8-11 классы, можно приступить к решению оптимизационных задач.

Задача № 17 базируется на теме – финансовая математика и делится в свою очередь на два вида: задачи на оптимизацию и задачи на вклады, кредиты, банки. Остановимся на задачах на оптимизацию. Учащимся необходимо объяснить, что это задачи, которые являются самыми реальными из всего экзамена. Они основываются на практическом применении, и их реализация пригодится, возможно, им в будущем. Приведем примеры некоторых задач, которые в разные годы имели место быть на едином государственном экзамене.

Задача №1. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить

между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 500 ц/га. Фермер может продать картофель по цене 5000 рублей за центнер, а свёклу – по цене 8000 рублей за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Задача №2. В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ у.е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 у.е. Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у.е. в этом случае придется заплатить рабочим?

Задача №3. В двух областях работают по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности.

Задача №4. Производство x тысяч единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + x + 7$ миллионов рублей в год. При цене p тысяч рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в миллионах рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 миллионов рублей?

Задача №5. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 60 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 3 кг никеля.

Во второй шахте имеется 260 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 2 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Задача №6. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» - 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

В данном разделе проанализирована методика преподавания практической составляющей темы «Оптимизация». Рассмотрена методика решения задачи №17 на оптимизацию, входящей в профильный единый государственный экзамен по математике. Приведена методика решения различных прототипов данных задач, взятых с таких популярных сайтов для подготовки к ЕГЭ как «Решу ЕГЭ по математике» и сайт Алекса Ларина. В ходе работы возникали некоторые проблемы, например, каким методом лучше решить задачу, чтобы было понятнее всего одиннадцатикласснику. Выбирался наиболее доступный в понимании метод. Также предоставлен ход подготовки к ЕГЭ не только по теме «Оптимизация», но и по ряду другим темам, которые нужно повторить, чтобы приступить к решению заданных задач №17 ЕГЭ на «Оптимальный выбор».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследования были решены все поставленные ранее задачи и

достигнуты цели. Были рассмотрены большой спектр школьных учебников, журналы, некоторые ресурсы сети Интернет. Также были разобраны задачи по теме «Оптимальный выбор» из контрольно-измерительных материалов ЕГЭ 2018-2019 годов. Поиск рассматриваемых задач проводился на известных сайтах для подготовки к ЕГЭ: сайт Алекса Ларина и сайт «Решу ЕГЭ по математике». В ходе работы рассмотрена большая теоретическая база. А также большая практическая база. На практике учащимся предоставляется возможность не только изучить тему «Оптимизация», но также повторить некоторые темы такие как: «проценты», «сложные проценты», «нахождение процента от числа и числа по его проценту», «кредиты и вклады» и другие. После того как обучающиеся повторят все пройденные ранее темы, можно приступать к решению оптимизационных задач.

Результаты работы можно применять не только как методическая помощь учителю в проведении уроков по теме «Оптимизация, оптимальный выбор», но также для подготовки к единому государственному экзамену, например, на уроках-подготовках к ЕГЭ. Решение задач было предложено в развернутой, доступной, подробной форме и на максимально понятном языке. Решение представленных задач будет понятно ребёнку даже в том случае, если он будет готовится к ЕГЭ самостоятельно.

Успешное преподавание темы «Оптимизация, оптимальный выбор» в средней школе, не только поможет с успехом сдать единый государственный экзамен, но также и будет хорошей основой для того, чтобы поступить в престижный университет, так как за эту задачу даётся наибольшее из возможных количество баллов.