

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Балашовский институт (филиал)

Кафедра математики

**МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ  
ТЕМЫ «СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ  
СТАРШЕЙ ШКОЛЕ**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 5 курса 151 группы  
направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя  
профилями подготовки)»,  
профили «Математика и информатика»,  
факультета математики экономики и информатики  
Бурякова Ивана Сергеевича

Научный руководитель

доцент кафедры

математики \_\_\_\_\_

Н.В. Бурлак

(подпись, дата)

Зав. кафедрой математики

кандидат педагогических наук,

доцент \_\_\_\_\_

О.А. Фурлетова

(подпись, дата)

**Балашов 2019**

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Одной из важнейших задач преподавания стереометрии в школе является формирование и развитие у учащихся пространственного воображения, а также умения работать с пространственными объектами. Знание и понимание стереометрии опирается не столько на теоретические основы, представленные в учебной литературе, сколько на способность учащегося видеть и правильно представлять пространственную фигуру.

Изучение стереометрии в старших классах способствует формированию пространственного мышления обучающихся, развитию логического мышления, развитию практических навыков построения, моделирования и конструирования пространственных фигур.

Старшеклассники знакомятся с пространственными фигурами, законами восприятия и изображения пространственных фигур. При этом идет повторение планиметрического материала, обобщение и систематизация всего курса геометрии средней школы.

Одним из главных средств достижения целей образования средствами геометрии являются задачи на построение сечений многогранников и круглых тел. Решение задач на построение сечений имеет мощный развивающий потенциал, сечения пространственных тел представлено в задачах ЕГЭ по математике.

Проблема заключается в том, что задачи, связанные с построением сечений, традиционно вызывают затруднения у школьников.

**Объект исследования:** процесс обучения стереометрии в старшей школе.

**Предмет исследования:** методика обучения старшеклассников построению сечений пространственных фигур.

**Цель исследования** состоит в поиске наиболее эффективных подходов в обучении решению задач на построение сечений многогранников.

Достижение предполагаемой цели связано с решением следующих задач:

- Провести анализ учебно-методической литературы, посвященной проблеме исследования.
- Рассмотреть методы решения задач на построение сечений.
- Выделить теоретические разделы математики, которые используются при решении задач на построение сечений.
- Рассмотреть особенности изучения темы «Сечения многогранников» в различных учебниках геометрии.
- Подобрать упражнения, способствующие формированию и развитию умения строить сечения многогранников.
- Подобрать средства наглядности, в том числе и интерактивные, для уроков геометрии.

**Содержание работы:** выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников и приложения.

### **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

Одним из источников информации для учащихся является учебник. К сожалению, в учебной программе за 10-й класс отводится недостаточно времени на изучение задач на построение сечений. В подтверждение к сказанному, в учебнике Л. С. Атанасяна, на тему «Построение сечений многогранников» отводится два часа, причем сопровождающих данную тему задач всего восемь. В учебнике А. В. Погорелова на построение сечений отведено около трех часов и десять задач, причем сначала рассматривается построение изображения призмы, а после – построение ее сечений, затем построение изображения пирамиды и ее сечений. Желательно продолжить тему «Построение сечений многогранников» после изложения темы «Многогранники».

Поскольку построение плоскости сечения зависит от способа задания плоскости, ученик, приступив к изучению темы «Построение сечений многогранников», должен к этому моменту хорошо усвоить для себя, что плоскость определяется:

- тремя точками;
- прямой и точкой;
- двумя параллельными прямыми;
- двумя пересекающимися прямыми.

Это необходимо знать, чтобы понимать, как именно можно построить сечение тела, если даны три точки на поверхности тела, точка и след, прямая на боковой поверхности тела и след.

Одной из наиболее важных и сложных учебных дисциплин в старших классах является курс геометрии. Основная причина, по которой у многих школьников возникают трудности в его освоении в 10-11 классах, связана с резким переходом от работы с плоскостными объектами к работе с пространственными объектами.

Тема: «Построение сечений многогранников» является достаточно сложной для восприятия старшеклассниками. Но эта тема занимает значительное место в геометрии. Профессор Саранцев Г.И., говоря о значениях геометрической составляющей курса отмечает:

- Она представлена как содержательный предмет исследования, выделяясь среди тем многими интересными свойствами.
- Темы, изученные ранее, позволяют достичь соответствующих результатов, при изучении темы: «Сечения многогранников».
- Многогранники дают богатый материал для развития пространственных представлений, дают возможность соединения живого пространственного мышления со строгой логикой, которое, по мнению А. Д. Александрова, составляет сущность геометрии.

- Форму многогранника имеют многие строения, предметы быта и детали машин, поэтому сведения о них имеют практическое применение.

Геометрические задачи традиционно делятся на три типа:

- 1) на вычисление;
- 2) на доказательство;
- 3) на построение.

Решение любых стереометрических задач требует не только вычислительных и логических умений и навыков, но и умений изображать пространственные фигуры на плоскости (например, на листе бумаги, классной доске), что по сути своей тесно связано с темой «Геометрические построения на плоскости». Стереометрические задачи на вычисления и доказательство легко можно решать, используя правильный рисунок пространственной фигуры. При изучении таких тем как «Параллельность прямых и плоскостей в пространстве», «Перпендикулярность прямых и плоскостей», «Углы между прямой и плоскостью, между двумя прямыми, между двумя плоскостями», а также других подобных тем, прекрасным иллюстрационным материалом является решение позиционных и метрических задач на построение пространственных фигур и сечений этих фигур плоскостями.

Построение сечений многогранников встречаются в заданиях ЕГЭ. Задачи такого типа встречаются как в задачах базового, так и профильного уровней.

Нами были изучены действующие учебники по геометрии 10-11 класса. Это учебники таких авторов, как Л.С. Атанасян, А.В. Погорелов, И.Ф. Шарыгин, Е.В. Потоскуев и Л.И. Звавич.

Чтобы построить сечение надо сначала узнать что же это «Сечение – это плоская фигура, полученная в результате пересечения тела плоскостью и содержащая точки, принадлежащие как поверхности тела, так и секущей плоскости».

Для построения сечения нужно построить точки пересечения секущей плоскости с ребрами и соединить их отрезками.

Плоскость (секущую плоскость) можно задать при помощи;

- трех точек;
- точки и прямой;
- двух пересекающихся прямых;
- двух параллельных прямых.

Правила построения сечений:

1. Соединять можно только две точки, лежащие в плоскости одной грани.

2. Секущая плоскость может пересекать параллельные грани только по параллельным отрезкам.

3. Если в плоскости грани отмечена только одна точка, принадлежащая плоскости сечения, то надо построить дополнительную точку. Для этого необходимо найти точки пересечения уже построенных прямых с другими прямыми, лежащими в тех же гранях.

Секущая плоскость пересекает грани многогранника по прямым, а точнее по отрезкам – разрезам.

Так как секущая плоскость идет непрерывно, то разрезы образуют замкнутую фигуру-многоугольник.

Полученный таким образом многоугольник и будет сечением тела.

Можно выделить простейшие сечения:

- Диагональные сечения параллелепипедов;
- Сечения плоскостью, параллельной основанию призмы или пирамиды;
- Сечение плоскостью параллельной боковой грани призмы или пирамиды.

Также существует большое количество разнообразных задач на построение сечений параллельных или перпендикулярных ребрам или

граням многогранников, проходящих под углом к ребрам или граням, проходящих через конкретные точки.

Удобнее всего задавать плоскость сечения тремя точками. Рассмотрим возможные варианты задания точек плоскости сечения, выделенные в пособии:

- 1) точка расположена вне многогранника;
- 2) точка находится внутри многогранника;
- 3) точка расположена в грани многогранника;
- 4) точка принадлежит ребру многогранника;
- 5) точка принадлежит диагонали многогранника;
- 6) точка совпадает с вершиной многогранника.

Рассматривая различные виды задач на сечения многогранников, большой интерес представляют сечения параллелепипеда, начать лучше даже с куба. Параллелепипед имеет 6 граней, поэтому его сечение может иметь следующую форму: треугольника, четырехугольника, пятиугольника и шестиугольника. Для построения этих и других сечений нужно владеть методами. Рассмотрим основные методы построения сечений:

1. Метод следов.
2. Метод внутреннего проектирования.
3. Комбинированный метод построения сечений.

Самый главный и простой для применения метод построения сечения многогранников - это *метод следов*.

Говоря о методе следов при построении сечений многогранников, надо начать с определения понятия «следа».

*Следом* называют прямую пересечения плоскостей: плоскости сечения и плоскости какой-либо грани многогранника. Чтобы построить след, достаточно знать две его точки, то есть точки, лежащие одновременно в секущей плоскости и плоскости рассматриваемой грани.

Основные правила построения сечений методом следов:

- Если даны (или уже построены) две точки плоскости сечения на одной грани многогранника, то след сечения этой плоскости - прямая, проходящая через эти две точки.

- Если дана (или уже построена) прямая пересечения плоскости сечения с основанием многогранника (след на основании), и есть точка, принадлежащая определенной боковой грани, то нужно определить точку пересечения данного следа с этой боковой гранью (точка пересечения данного следа с общей прямой основания и данной боковой грани).

- Точку пересечения плоскости сечения с основанием можно определить как точку пересечения какой-либо прямой в плоскости сечения с ее проекцией на плоскость основания.

То есть, суть метода заключается в построении вспомогательной прямой, являющейся изображением линии пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани фигуры. Удобнее всего строить изображение линии пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания для призм и с плоскостью основания для пирамид. Используя след, легко построить изображения точек секущей плоскости, находящихся на боковых ребрах или гранях фигуры.

Далее рассмотрим *метод внутреннего проектирования*. Суть данного метода заключается в том, чтобы спроектировать точки на нижнее основание фигуры. После это соединяем две спроектированные точки друг с другом и пресекаем их прямой, которая образуется в результате соединения спроектированной точки и точке ребра, лежащего в нижнем основании фигуры. После чего, точку пересечения проектируем на прямую, которая образуется после соединения двух точек проекции. Затем третью точку и ранее спроектированную точку соединяем и прямой пресекаем то ребро, точку которого брали для получения пересечения. Итак, поступаем до тех пор, пока не построим все точки, через которые проходит данное сечение.

*Комбинированный метод построения сечений*

Суть комбинированного метода построения сечений многогранников состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с методом следов и методом внутреннего проектирования.

Тема: «Построение сечения» затрагивается не только в школьном курсе геометрии для общего развития, но и на Едином Государственном Экзамене. Это задание №8 из основной части и задание №14 развернутой части (Стереометрическая задача).

Геометрические модели - это один из самых наглядных способов демонстрации фигур стереометрии. Геометрические модели (каркасные и объемные) традиционно используются на уроках геометрии, так как они позволяют учащимся рассмотреть стереометрическую фигуру, так сказать, «в живую», дает им возможность покрутить модель в руках, рассмотреть все элементы со всех сторон. Это дает возможность учащемуся осознать и увидеть поведение секущей плоскости.

В современном мире специальные и готовые модели можно приобрести в специализированных магазинах. Также можно изготовить модели самостоятельно. Способов изготовления неограниченное множество и ограничивается только фантазией создателя. Изготовить модель может сам учитель, можно привлечь к изготовлению моделей учеников. Например, можно посвятить занятие математического кружка различным способам изготовления моделей.

GeoGebra — это бесплатная кроссплатформенная динамическая математическая программа, которая может использоваться на всех уровнях образования.

Программа GeoGebra обладает массой инструментов, но в то же время имеет простой интерфейс. Очень быстро можно освоить и использовать аппарат, позволяющий рисовать чертежи. При этом картинки можно сделать динамическими и успешно использовать для наглядных иллюстраций.

Глубокому усвоению всего школьному курсу геометрии способствует стереометрия, изучаемая в старших классах. Решение стереометрической задачи чаще всего требует выделения плоскостных объектов в составе пространственных, а это приводит к необходимости решать ряд планиметрических задач. Таким образом, решая задачи по стереометрии, всё время приходится возвращаться к планиметрии, повторять теоремы и вспоминать различные формулы. При решении стереометрических задач ещё в большей мере, чем в планиметрии, используются средства алгебры и тригонометрии, применяются векторный и координатный методы, дифференцирование и интегрирование. Таким образом, задачи по стереометрии способствуют творческому овладению всей совокупностью математических знаний.

Удобство применения среды GeoGebra рассмотрим на конкретной задаче, взятой из сборника для подготовки к единому государственному экзамену.

Итак, GeoGebra позволяет строить быстро различные фигуры стереометрии и их сечения. Также отметим, что фигуры, построенные с помощью GeoGebra, можно вращать и рассматривать с разной стороны, а также можно перемещать точки, задающие сечения. Интересна еще одна возможность GeoGebra - это возможность построения разветок многогранников.

В учебниках геометрии для старшей школы встречаются поэтапные оформления задач на построение сечений многогранников, то есть показывается динамика изменения фигуры. Представленный таким образом материал позволяет продемонстрировать каждый шаг построения и глубже понять суть метода построения сечений.

Заметим, что при использовании учителем GeoGebra для построения сечения в задачах, он может не только продемонстрировать поэтапное построение сечений, но и изменять готовый чертеж, перемещая точки

задающие сечение, что позволит увидеть все возможные случаи расположения точек.

Задачи на готовых чертежах - это задачи, в которых условие предложено в виде чертежа с общепринятыми понятными обозначениями и, как правило, краткой записью заключения; чаще всего предполагается устный характер их решения. Задачи на готовых чертежах находят все более широкое применение в курсе геометрии основной и средней школы, поэтому и при изучении сечений многогранников такие задачи весьма эффективны.

Задачи на готовых чертежах могут выполнять роль подготовительных упражнений перед введением нового понятия, доказательством теоремы, решением сложной задачи, представляя собой решение элементарной стандартной подзадачи.

Незаменимы задачи на готовых чертежах при организации самостоятельной работы учащихся как обучающего, так и контролирующего характера; полезны домашние задания по готовым чертежам, в том числе индивидуального характера.

Задачи на готовых чертежах, в изучении стереометрии играют большую роль. При изучении темы «Построение сечений многогранников» выделяются следующие типы задач:

- задачи на построение сечения,
- задачи на нахождение ошибки на чертежах,
- задачи на восстановление пропущенного шага в построении сечения.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В своем исследовании мы попытались выяснить основные методические подходы, которые позволят облегчить изучение темы «Построения сечения многогранников» у школьников.

Выяснили, что при решении задачи по построению сечений многогранников используется большое количество теоретических сведений

из курсов планиметрии и стереометрии. При решении задач на построение сечений происходит повторение и закрепление изученного ранее теоретического материала.

Анализ учебников по геометрии старшей школы 10-11 классов показал, что темы и задачи, связанные с сечением, представлены во всех учебниках, но внимание этому вопросу уделяется недостаточно. Задачи на построение сечений имеют большое развивающее значение.

В ходе работы выяснили, что наиболее эффективно при изучении вопросов, связанных с построением сечений, применение каркасных моделей, которые могут быть самостоятельно изготовлены, и на которых можно продемонстрировать реальное сечение. Возможности ИКТ позволяют экономить время на уроке, при подготовке к урокам, при этом демонстрировать качественные чертежи. Использование GeoGebra дает возможность показать поэтапное построение сечений, позволяет вращать изображение, изменять готовый чертеж, перемещать точки задающие сечение, что позволит увидеть все возможные случаи.

Поэтапное оформление решения задачи на первых порах позволяет понять суть методов построения сечения, усвоить этапы построения, осмысленно решать задачи по теме. Также задачи различного типа на готовых чертежах позволяют также экономить время на уроках, увеличить плотность урока и способствуют повышению эффективности работы по теме, позволяю лучше разобраться в сечениях многогранников.

В заключение хотелось бы отметить, что только грамотный выбор методов и приемов, их сочетание, учет методических особенностей использования смогут способствовать качественному освоению темы, связанной с сечениями многогранников.