МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Разрывный оператор Стеклова в задаче восстановления непрерывных функций

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВАРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Горемыко Максима Сергеевича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ________ Г.В.Хромова
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись

Зав. кафедрой
д.ф-м.н., профессор ________ В.А.Юрко
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись

Саратов 2020

Введение. В данной дипломной работе рассматривается метод восстановления непрерывной функции при помощи разрывного оператора Стеклова, который относится к области некорректно поставленных задач. В математической физике принято различать понятия корректно и некорректно поставленной задачи. Сам термин корректно поставленной задачи был впервые введен Жаком Адамаром.

Содержание дипломной работы В первом разделе рассматривается теория некорректно поставленных задач и примеры этих задач. Второй раздел посвещен задаче восстановлению непрерывных функций. В третьем разделе рассматривается метод регуляризации на базе разрывного оператора Стеклова. Четвертый раздел посвящен численному алгоритму решения задачи восстановления, а также приводятся численные эксперименты по восстановелнию функции. В приложении приводится код прогарамм для приближения функций оператором Стеклова и для восстановлении функций оператором Стеклова.

Основными задачами, считаю:

- изучить основную литературу, касающуюся данной темы исследования.
- провести численный эксперимент по приближению непрерывной функции оператором Стеклова
- провести численный эксперимент по восстановлению непрерывной функции оператором Стеклова

Основное содержание работы.

Понятие корректно и некорректно поставленных задач. При исследовании решения задачи математической физики центральное место занимают вопросы существования решения, единственность решения, зависимость решения от "малых изменений"исходных данных. Если "малые изменения"исходных данных приводят к "малым изменениям"решения, то будем говорить, что решение устойчиво.

Определение. Задача называется корректно поставленной, если ее решение существует,единственно и устойчиво. Некорректно поставленная задача — задача, не обладающая каким-либо из свойств корректно поставленной задачи.

Постановка задачи восстановления функций Пусть X_1 и X_2 - два банаховых пространства, таких, что $X_1 \subset X_2$ в теоретико-множественном смысле и выполняется оценка:

$$||\cdot||_{X_2} \leq C||\cdot||_{X_1} \tag{1}$$

Пусть элемент $u \in X$ задан его δ - приближением f_δ в метрике пространства X_2 : $||u_\delta - u|| \leq \delta$. требуется по f_δи δ построить последовательность элементов $\widetilde{u}_\delta$ так, чтобы $||u_\delta - u||_{X_1} \to 0$ при $\delta \to 0$. Будем называть поставленную задачу задачей восстановления из X_2 в X_1.

Данная задача возникает, в основном, при обработке исходных данных физических задач. Если, например, $X_1 = C[a,b], X_2 = L_2[a,b]$, то мы приходим к некорректно поставленной задаче восстановления непрерывной функции по её среднеквадратическим δ - приближениям. Если $X_1 = C^{(1)}[a,b], X_2 = C[a,b]$ - к задаче восстановления производной функции, заданной её равномерными δ - приближениями, т.е. в последнем случае речь идёт о приближённом решении классической некорректной задачи - задачи дифференцирования. Поставленную в общем задачу восстановления мы будем рассматривать как задачу решения операторного уравнения $Au = f$, где A - оператор вложения из X_1 в X_2, а правая часть задана её δ - приближениями f_δ в X_2. Существование и единственность решения уравнения $Au = f$ тривиальны. Из оценки (1) следует справедливость утверждения: оператор A^{-1} , обратный к оператору вложения из X_1 в X_2, неограничен тогда и только тогда, когда нормы в пространствах X_1 и X_2 неэквивалентны. Поскольку в этом случае уравнение $Au = f$ является уравнением первого рода, то отсюда следует, что для приближённого решения задачи восстановления из X_1 в X_2 можно применить любой из методов регуляризации, подходящий к данной ситуации. Отсюда следует также, что задача восстановления моэет служить модельной задачей при исследовании различныъ вопросов уравнений $I-$го рода. Пусть непрерывная функция $f(x)$ задана ее δ - приближением в среднеквадратичной метрике: $||f_\delta - f||_{L_2} \leq \delta$ Задачу получения равномерных приближений к $f(x)$ по заданным f_d и δ мы называем задачей восстановления функции $f(x)$. Это простейшиая некорректно поставленная задача.

Оператор Стеклова

В.А. Стеклов ввел в рассмотрение оператор:

$$\frac{1}{\alpha}\int_{x}^{x+\alpha} f(t)dt, \tag{2}$$

который был назван его именем. Наряду с ним оператором Стеклова также называются операторы:

$$\frac{1}{\alpha}\int_{x-\alpha}^{x} f(t)dt \text{ и } \frac{1}{2\alpha}\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)dt \tag{3}$$

Мы будем называть первый из них правосторонним оператором Стеклова, второй левосторонним оператором, а третий симметричным оператором Стеклова. Как оператор приближения непрерывных функций он имеет преимущество перед другими операторами в том, что от приближаемой функции не требуется дополнительных усилий гладкости или переодичности. Его недостаток состоит в том, что он может служить для приближения функций лишь во внутренних точках отрезка $[a, b]$.

Полагаем, что $f(x) \in C[0,1]$. Чтобы значения этих операторов не выходили за пределы этого отрезка, считаем, что при каждом фиксированном α в правосторннем операторе Стеклова $x \in [0, 1-\alpha]$, в левостороннем $x \in [\alpha, 1]$, в симметричном $x \in [\alpha, 1-\alpha]$.

Операторы Стеклова имеют непрерывную область значений. При этом правосторонний оператор Стеклова дает равномерную сходимость к функции $f(x)$ на отрезке $[0, 1-\epsilon]$, а левосторонний - дает сходимость функции на отрезке $[\epsilon, 1]$, а симметричный на отрезке $[\epsilon, 1-\epsilon]$, где $\epsilon \geq \alpha$.

Разрывные операторы предоставляют возможность строить из них конструкции,которые позволяют получать равномерные приближения к решению различных задач. А именно на базе разрывных операторов была решена задача восстановления непрерывной функции по ее среднеквадратичному приближению — используя разрывный оператор Стеклова

Построим разрывной оператор Стеклова следующим образом. Возьмем правосторонний оператор Стеклова, но будем рассматривать его на отрезке

$[0,1/2]$, а левосторонний на отрезке $[1/2,1]$ т.е. построим оператор: Пусть $f(x) \in C^1[0,1]$. Из операторов

$$S_\alpha f = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha} f(t)dt, & x \in [0,1/2], \\ \frac{1}{\alpha}\int_{x-\alpha}^{x} f(t)dt, & x \in [1/2,1]. \end{cases} \tag{4}$$

Такая запись предполагает, что мы считаем несущественным, какие именно значния приписывать функции $S_\alpha f$ при $x = 1/2$.

Потребуем, чтобы значения этого оператора не выходили за границы отрезка, т.е. чтобы выполнялись неравенства:

$$\frac{1}{2} + \alpha \leq 1 \text{ и } \frac{1}{2} - \alpha \geq 0.$$

Отсюда получим несущественное ограничение на $\alpha : \alpha \leq 1/2$.

Функция $S_\alpha f$ терият разрыв 1-го рода в точке $x = 1/2$. Поэтому мы будем их рассматривать как элементы подпространства из $L_\infty[0,1]$ с нормой:

$$||\cdot||_{L_\infty} = max(||\cdot||_{C[0,1/2]}, ||\cdot||_{C[1/2,1]}).q$$

Теорема 1 *Для любой $f(x) \in C[0,1]$ имеет место сходимость*

$$||S_\alpha f - f||_{L_\infty} \to 0, \qquad \alpha \to 0.$$

Метод регуляризации на базе разрывного оператора Стеклова

Пусть нам дана функция $f_\delta(x) \in L_2$, такое что:

$$||f_\delta(x) - f(x)||_{L_2} \leq \delta \tag{5}$$

Нужно найти такую $\overline{f}_\delta$, чтобы выполнялась сходимость:

$$||\overline{f}_\delta(x) - f(x)||_{L_\infty} \to 0, \ \delta \to 0. \tag{6}$$

Пусть $x \in [0,1/2]$ тогда:

$$|S_\alpha f_\delta - f| = |S_\alpha f_\delta - S_\alpha f + S_\alpha f - f| \leq |S_\alpha f_\delta - S_\alpha f| + |S_\alpha f - f|. \tag{7}$$

Первый модуль в правой части выражения (7) можно оценить следующим образом:

$$|S_\alpha f_\delta - S_\alpha f| = |S_\alpha(f_\delta - f)| = \frac{1}{\alpha}\left|\int_x^{x+\alpha}(f_\delta(t) - f(t))dt\right|. \qquad (8)$$

Согласно неравенству Коши - Буняковского получаем:

$$|S_\alpha(f_\delta - f)| \leq \frac{1}{\alpha}\sqrt{\int_x^{x+\alpha}(f_\delta(t) - f(t))^2 dt}\sqrt{\int_x^{x+\alpha} dt}. \qquad (9)$$

Отсюда получаем:

$$|S_\alpha(f_\delta - f)| \leq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}. \qquad (10)$$

Точно такая же оценка имеет место и для $x \in [1/2, 1]$. Отсюда следует оценка:

$$||S_\alpha||_{L_2 \to L_\infty} \leq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}. \qquad (11)$$

Пусть $f(x) \in lip_M 1$. Тогда по теореме (1):

$$||S_\alpha f - f||_{L_\infty} \leq M\alpha. \qquad (12)$$

Отсюда следует:

$$||S_\alpha f_\delta - f||_{L_\infty} \leq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + M\alpha. \qquad (13)$$

Найдем зависимость $\alpha(\delta)$ такое что:

1. $\alpha(\delta) \to 0,\ \delta \to 0.$
2. $\frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} \to 0, \delta \to 0.$

Найдем минимум формулы (13):

$$\varphi(\alpha, \delta) = M\alpha + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}},\ \varphi'_\alpha = 0, \qquad (14)$$

$$M - \frac{\delta}{2 \cdot \alpha^{\frac{3}{2}}} = 0,\ \alpha^{\frac{3}{2}} = \frac{\delta}{2M}. \qquad (15)$$

Таким образом $\alpha(\delta)$ для разрывного оператора Стеклова примет вид:

$$\alpha(\delta) = \left(\frac{\delta}{2M}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{16}$$

Отсюда получаем оценку погрешности:

$$||S_\alpha f_\delta - f||_{L_\infty} \leq C\delta^{\frac{2}{3}}, \tag{17}$$

где $C = M^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} + M^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$.

Иногда нам не известно про функцию $f(x)$ ничего кроме, что $f(x)$ произвольная непрерывная функция, тогда мы выбираем $\alpha(\delta)$ из соображений, что:

$$\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} \to 0,\ \delta \to 0. \tag{18}$$

Численный эксперимент по приближению функции Рассмотрим численный алгоритм подсчета интеграла разрывного оператора Стеклова. Пусть функция $f(x)$ непрерывно интегрируема на $[0, 1]$. Нам требуется вычислить определенный интеграл:

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{19}$$

Рассмотрим оператор Стеклова (3.6). Оператор Стеклова действует на $[0, 1]$. Положим, что $f \in C[0, 1]$. Следовательно значения функции при $x = 1/2$ в (3.6) несущественны.

Для того чтобы точка x_0 бралась в учет при решении $S_{\alpha 2}f$ применим к нему метод левых прямоугольников.

$$S_{\alpha 2}f = \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha} f(t)dt \qquad x \in [0, \frac{1}{2}]. \tag{20}$$

Разобьем $[0, 1/2]$ на N частей $[x_{i-1}, x_i], \qquad i \in [1, N]$,

$$0 = x_0 < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = 1/2, \qquad i \in [1, n],$$

т.к. $S_{\alpha 2}f$, где $x \in [0, \frac{1}{2}]$, то мы имеем разбиение:

$$0 = x_0 < x_i < ... < x_{\frac{N}{2}-1} < x_{N/2} = \frac{1}{2},$$

т.е. получим:

$$\frac{1}{\alpha}\int_{x_i}^{x_i+\alpha} f(t)dt. \tag{21}$$

Применим к (4.3) метод левых прямоугольников. Так как интеграл действует на $[x_i, x_i + \alpha]$ разобьем этот отрехок на n частей.

Разбиение:

$$x_i = t_k < t_{k+h} < ... < t_n = x_i + \alpha, \qquad k \in [i, n].$$

1) Вычислим h, где n - число разбиений:

$$h = \frac{x_i + \alpha - x_i}{n} = \frac{\alpha}{n} \Rightarrow h = \frac{\alpha}{n}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad \alpha > h.$$

2) Вычислим узлы:

$$t_k = x_i + k \cdot h, \qquad k \in [0, n].$$

k	t_k	$f(t_k)$
0	$x_i + 0 \cdot h$	$f(t_0)$
1	$x_i + 1 \cdot h$	$f(t_1)$
...	...	...
m	$x_i + m \cdot h$	$f(t_n)$

Таким образом, получим:

$$S_{\alpha 2}f = \frac{1}{\alpha}\int_{x_i}^{x_i+\alpha} f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{0}^{m-1} f(t_k) = \frac{1}{n}[f(t_0) + f(t_1) + ... + f(t_{m-1}))].$$

Получили формулу вычисления интеграла для оператора $S_{\alpha 2}$. Применим к

$$S_{\alpha 1}f = \frac{1}{\alpha}\int_{x-\alpha}^{x} f(t)dt, \qquad x \in [\frac{1}{2}, 1] \tag{22}$$

метод правых прямоугольников, для того чтобы точка x_n бралась в учет при вычислении. Разобьем отрезок $[\frac{1}{2}, 1]$ на m частей:

$$\frac{1}{2} = x_0 < x_j < ... < x_{m-1} < x_m = 1.$$

Получим:

$$\frac{1}{\alpha}\int_{x_j-\alpha}^{x_j} f(t)dt. \tag{23}$$

Разбиение:

$$x_j - \alpha = t_l < t_l + h < ... < t_m = x_j \qquad l \in [1, m].$$

1) Вычислим h, где n - число разбиений:

$$h = \frac{x_j - (x_j - \alpha)}{n} = \frac{\alpha}{n} \Rightarrow h = \frac{\alpha}{n}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad \alpha > h.$$

2) Вычислим узлы: $t_l = (x_j - \alpha) + j \cdot h, \qquad l \in [1, m]$.

l	t_l	$f(t_l)$
1	$(x_j - \alpha) + 1 \cdot h$	$f(t_1)$
2	$(x_j - \alpha) + 2 \cdot h$	$f(t_2)$
...	...	...
m	$(x_j - \alpha) + m \cdot h$	$f(t_m)$

Таким образом, получим:

$$S_{\alpha 1} f = \frac{1}{\alpha}\int_{x_j-\alpha}^{x_j} f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{1}^{m} f(t_l) = \frac{1}{n}[f(t_1) + f(t_2) + ... + f(t_m))].$$

Результаты численного эксперимента по приближению функции при помощи оператора S_α. Дана точная функция $f(x) = x^2$. Наша задача - посмотреть, на сколько хорошо разрывные оператор Стеклова приближает эту функцию.

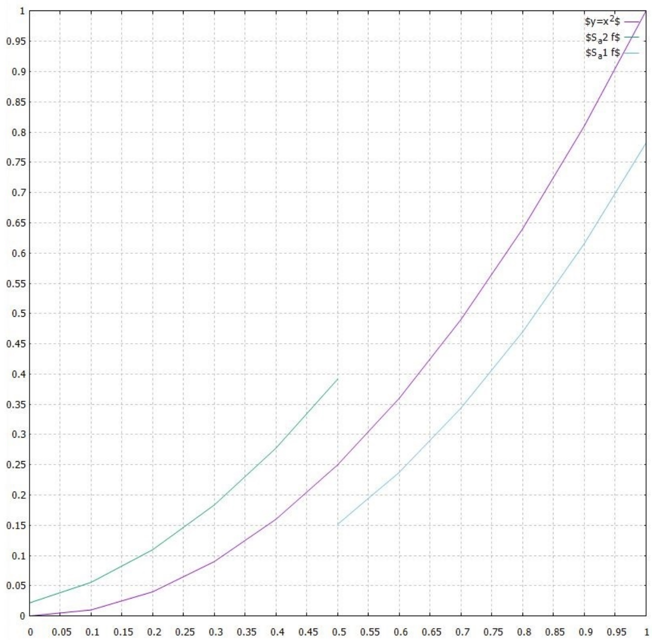

Рисунок 1 — Значения: $\alpha = 0.3, n = 5$

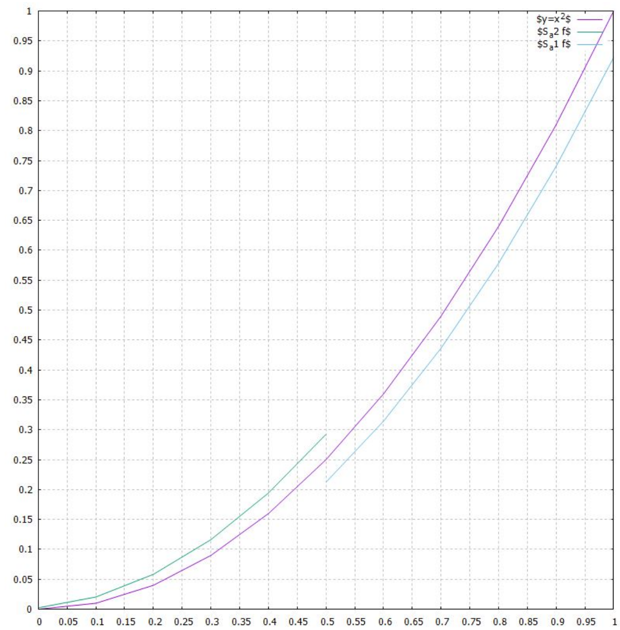

Рисунок 2 — Значения: $\alpha = 0.1, n = 5$

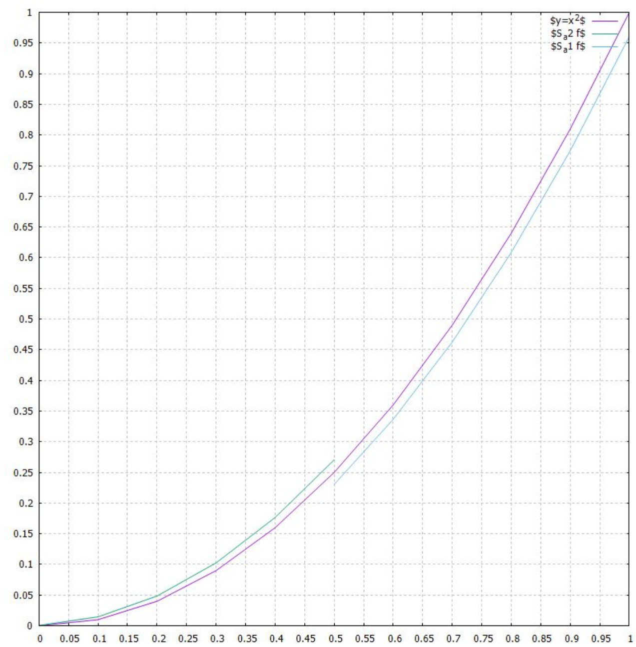

Рисунок 3 — Значения: $\alpha = 0.05, n = 5$

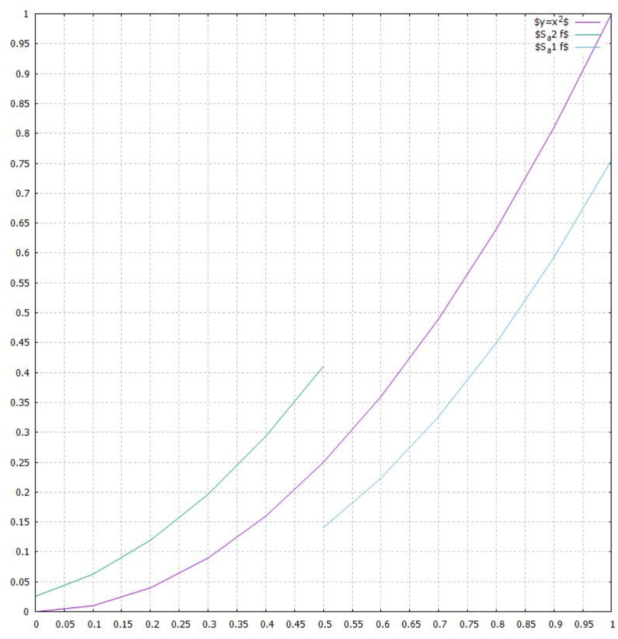

Рисунок 4 — Значения: $\alpha = 0.3, n = 10$

На рисунках 1-3 отчетливо видно, что функции $S_{\alpha 2}$(отмечена зеленым цветом) и $S_{\alpha 1}$(отмечена синим цветом) стримятся к "исходной" $y = x^2$(отмечена фиолетовым цветом) при $\alpha \to 0$. Также отметим, что при увеличении узлов функции $S_{\alpha 2}$ и $S_{\alpha 1}$ т.е. при $n \to \infty$ результат ближется к более точному значению, что можно заметить на рисунках 1 и 4.

Численный эксперимент по восстановлению функции

Моделирование функции. Моделирование функции с заданной погрешностью занимает одно из важных мест в некорректно поставленных задачах. Иногда чтобы проверить метод недостаточно его проверить аналитически, нужно удостовериться в правильности его работы на примерах. Для этого нунжо смоделировать функцию с заданной погрешностью и только потом применять для нее тот или иной метод восстановления.

Пусть $f(x) \in C[a,b]$. Разобьем отрезок на n частей. Таким образом $[a,b] = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, где x_i- точки разбиений. Фкнцию $f(x)$ заменим набором ее значений в узлах т.е. $f(x) = \{f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)\}$. Смоделируем функцию $f_\delta(x)$, которая будет удовлетворять следудющему неравенству: $||f_\delta - f(x)||_{L_2} \leq \delta$ Распишем норму в L_2 по формуле: $||f(x)||_{L_2} = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$. Следовательно получаем: $\sqrt{\int_a^b (f_\delta(x)) - f(x))^2 dx} \leq \delta$ Для получения интеграла воспользуемся квадратурной формулой прямоугольников: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i-0}^{n-1} f(x_i)$. где n- число разбиений отрезка. Получим:

$$\sqrt{\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f_\delta(x_i) - f(x_i))^2} \leq \delta \tag{24}$$

Проведем моделирование функции $f_\delta(x)$. Сначала рассмотрим набор значений $f_\delta(x_i)$ по формуле:

$$f_\delta(x_i) = f(x_i) + (-1)^i A_i \delta,\ A_i - random[0,1],\ i = 0, 3, ..., n \tag{25}$$

Затем испортим некотрые значения $f_\delta(x_i)$ с помощью вспелсков в точках j=1,2 по формуле:

$$f_\delta(x_j) = f(x_j) + (-1)^j A_j \delta N,\ A_j - random[0,1], \tag{26}$$

где N - характерезует всплеск. Подставим в (2) f_δ из формул (3) и (4). Тогда получаем: $\sqrt{\frac{b-a}{n}}(\sum_{i=0}^{n}((-1)^i A_i\delta)^2 + \sum_{j=1}^{2}((-1)^j A_j\delta N)^2) \leq \delta$ Проведем численный эксперимент для функции $f(x) = x^2, a = 0, b = 1$.

$$\sqrt{\frac{1}{n}}(\sum_{i=0}^{n}((-1)^i A_i\delta)^2 + \sum_{j=1}^{2}((-1)^j A_j\delta N)^2) \leq \delta \tag{27}$$

Задаем n, δ, N Выбираем A_i так чтобы выполнялась оценка (27).

Проведем численный эксперимента по восстановлениию функции при помощи оператора $S_\alpha f_\delta$. Дана точная функция $f(x) = x^2$, на основее ее мы моделируем функцию $f_\delta(x)$ по некотрому закону. Наша задача - посмотреть, на сколько хорошо разрывный оператор Стеклова восстанавливает эту функцию по дискретным значениям $f_\delta(x_i)$ и узнать как согласуется параметры α и δ. На рисунках 5 -7,где δ - приближение,N - общее число узлов на $[0, 1]$, а n - число узлов $[x_i; x_{i+i}]$ и $[x_{i-i}; x_i]$ соответственно. Также отчетливо видно, что функции $S_{\alpha 2} f_\delta$ (отмечена синим цветом) и $S_{\alpha 1} f_\delta$ (отмечена красным цветом) стримятся к "исходной" $y = x^2$ (отмечена фиолетовым цветом) при $\delta \to 0$. Функии $S_{\alpha 2} f_\delta, S_{\alpha 1} f_\delta$ строятся с помощью функции f_δ, заданая дискретно и смоделирована по определенному закону. Также отметим, что при увеличении количества узлов функции $S_{\alpha 2}$ и $S_{\alpha 1}$, т.е. при $n \to \infty$, результат ближется к более точному значению, что можно заметить на рисунках. Стоит отметить, что на функциии f_δ, с большими всплесками, восстановление происходит с некоторыми отклонениями. Где всплески не ярковыражены - функция восстанавливается лучше. При подсчете α была использована специальная формула согласования для разрывного оператора Стеклова, в которой есть закономерность такая, что чем точнее выбрана δ, тем точнее результат вычисления, проще говоря: $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Результаты восстановления функции приведены далее на рисунках:

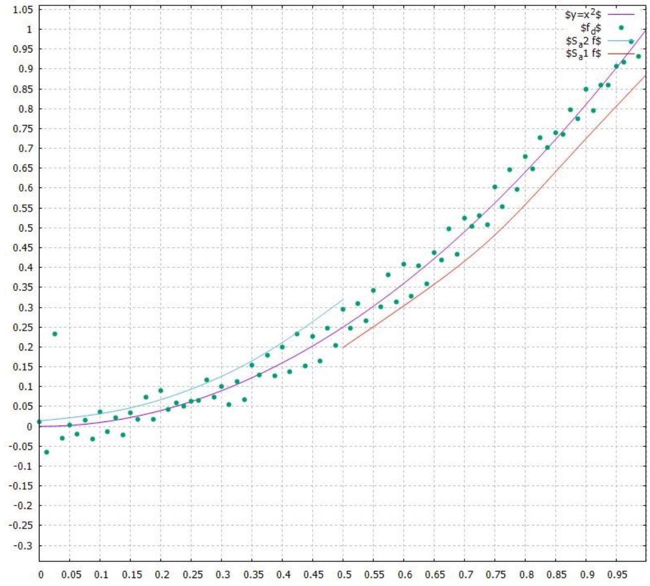

Рисунок 5 — Значения: $\delta = 0.055, n = 10,\ N = 80$

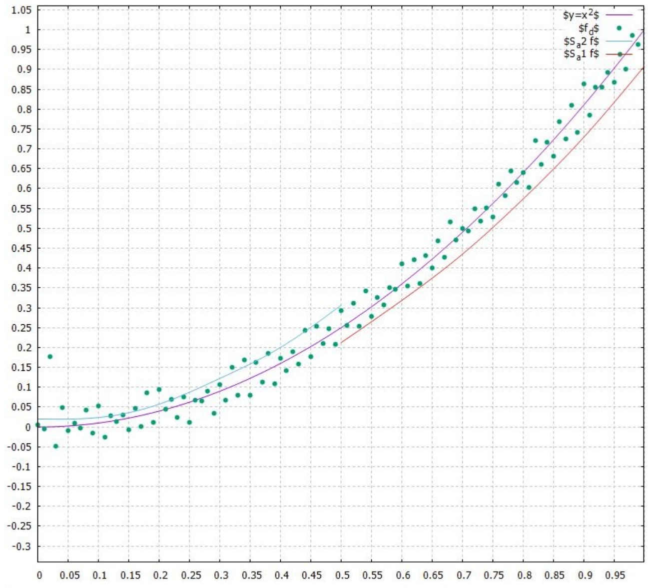

Рисунок 6 — Значения: $\delta = 0.055, n = 10, N = 100$

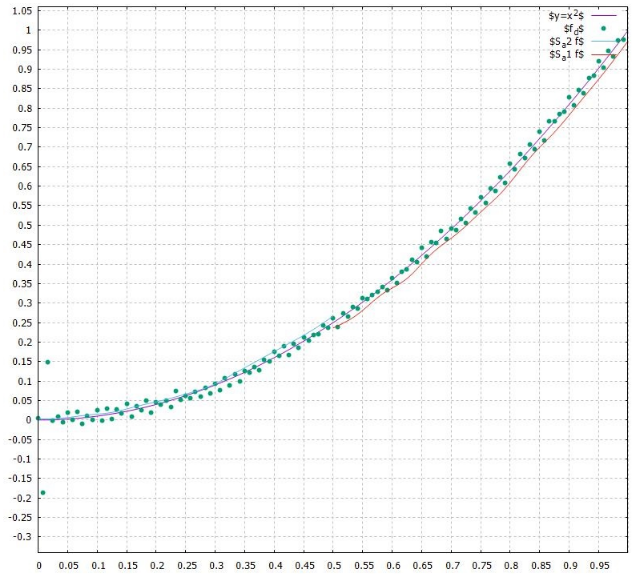

Рисунок 7 — Значения: $\delta = 0.02, n = 5, N = 120$

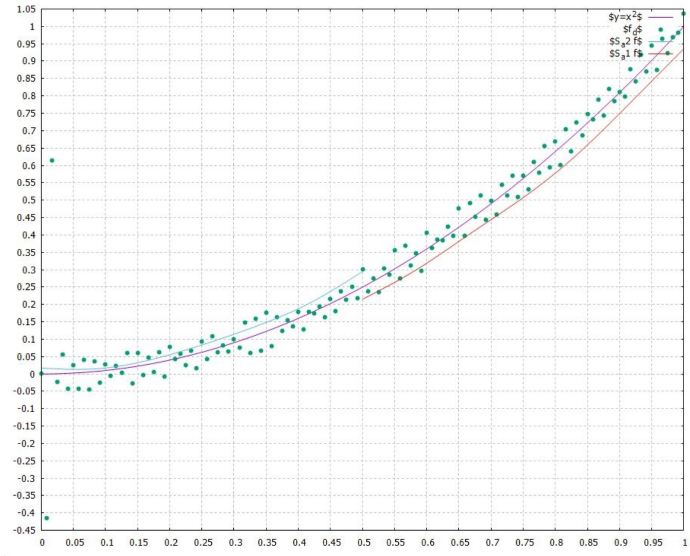

Рисунок 8 — Значения: $\delta = 0.055, n = 10, N = 120$

Заключение. В ходе выполнения дипломной работы были изучены основные определения и теоремы касательно корректно и некорректно поставленных задач, а так же изучена основная литература относитльно восстановлении непрерывной функции при помощи разрывного оператора Стеклова. Проведенный численный эксперимент показал, что разрывный оператор Стеклова точно приближает функцию $f(x) = x^2$. Все проведенные исследования позволили более углубленно изучить метод восстановления функции оператором Стеклова. При помощи данного оператора был приведен эксперимент по восстановлению функции, было сделано моделирование функции с погрешностью и ее восстановление. Отмечено, что чем больше всплеск у моделируемой функции, тем хуже она восстанавливается. И наоборот. Так же была получена закономерность: чем точнее выбрано δ и формула для согласования α и δ тем точнее результаты вычисления. В работе приводится программа, реализованная на языке C++ и результаты численного эксперимента .