МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Методы вычисления решений интегральных уравнений

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Кашкалда Владислава Денисовича

Научный руководитель

Доцент, к.ф.-м.н., доцент		Д.В. Поплавский
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

Профессор, д.ф.-м.н.		В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2020

Введение. Во многих вопросах современного естествознания возникает задача решения интегральных уравнений, нахождения как точных решений, если это возможно, так и приближенных решений. При этом важны различные свойства решений интегральных уравнений, такие как единственность и существование решения, устойчивость решения. Свойства корректности и некорректности самих интегральных уравнений.

Как известно, свойство некорректности уравнения Фредгольма первого рода создает большие трудности при практическом использовании таких уравнений, в то время как целый ряд физических процессов описывается именно такими уравнениями. Малая погрешность в задании входных данных может так сильно изменить решение, что оно не будет иметь ничего общего с тем физическим процессом, который описывает уравнение, даже, возможно, что решение просто не будет существовать. По этой причине долгое время считалось, что интегральное уравнение Фредгольма первого рода, как и другие некорректные задачи, нецелесообразно использовать для описания физических процессов. Но в последние десятилетия этот взгляд коренным образом изменился, и некорректные задачи стали объектом интенсивного научного исследования.

Цель работы: овладеть теоретическими знаниями, практическими умениями и навыками системного подхода к проблеме выбора метода решения задачи. Освоить основные методы решения интегральных уравнений в зависимости от типа уравнения и характерных особенностей уравнения, научиться применять информационные технологии при решении задач. Особое внимание уделить интегральным уравнениям Фредгольма первого и второго рода, приближенным методам решения этих уравнений.

Структура работы. Бакалаврская работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованных источников и приложений.

В первой главе работы приводятся основные понятия и определения, необходимые для изложения материала. Приводится классификация линейных интегральных уравнений и кратко излагается история вопроса. Вводятся понятия корректно и некорректно поставленных задач. Рассмотрены уравнения Фредгольма с точки зрения корректности постановки задачи. Проведен анализ интегрального уравнения Фредгольма первого рода с точки зрения корректности задачи. Приведены примеры, демонстрирующие утверждения.

Во второй главе работы изучаются приближенные методы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Каждый из методов демонстрируется на конкретном примере.

В третьей главе работы рассмотрены методы решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода. И так же приведены демонстрационные примеры.

В четвертой главе подробно рассмотрены следующие методы: метод квадратур и метод последовательных приближений. Для нахождения приближенных решений этими методами написаны программы и в этой главе обсуждаются результаты работы программ.

Наконец, в Приложениях приводятся коды программ, написанные на C++, для нахождения приближенных решений интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода. В конце приводится список литературы, которая была использована в написании данной работы.

Основное содержание работы. Интегральным уравнением называется уравнение, которое содержит неизвестную функцию под знаком интеграла, например, уравнение

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)y(t)dt + f(x), \quad a \leq x \leq b, \tag{1}$$

где $K(x,t)$, $f(x)$– известные функции, $y(x)$– искомое решение, функция $K(x,t)$ в уравнении (1) называется ядром оператора. Уравнение (1) – линейное, так как неизвестная функция $y(x)$ входит в уравнение линейно. В работе рассматриваются только линейные уравнения.

Линейные интегральные уравнения классифицируются следующим образом:

если искомая функция содержится только под знаком интеграла, то уравнение называется интегральным уравнением первого рода. Это уравнения вида

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x),$$

если искомая функция содержится и вне интеграла, то уравнение называется интегральным уравнением второго рода. Это уравнения вида

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)y(t)dt + f(x).$$

если пределы интегрирования фиксированы, например (1), то интегральное уравнение называется уравнением Фредгольма. В работе рассматриваются только уравнения Фредгольма.

Многие математические задачи заключаются в нахождении решения y по исходным данным задачи f. Это кратко можно записать как $y = R(f)$, где $R-$ некоторый оператор. Будем считать y и f элементами метрических пространств Y и F с метриками $\rho_Y(y_1, y_2)$ и $\rho_F(f_1, f_2)$.

Решение y называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\rho_F(f_1, f_2) \leq \delta(\varepsilon)$ следует $\rho_Y(y_1, y_2) \leq \varepsilon$, где f_1 и f_2- произвольные элементы F, $y_1 = R(f_1) \in Y$, $y_2 = R(f_2) \in Y$.

Задача $y = R(f)$ называется корректно поставленной на паре метрических пространств (Y, F), если выполняются условия:

- Для всякого элемента $f \in F$ существует решение $y \in Y$.
- Решение определено однозначно.
- Решение устойчиво.

Задачи, не удовлетворяющие перечисленным требованиям, называются некорректно поставленными.

Метрики в пространствах Y и F характеризуют, в каком смысле понимается малое изменение y и f. От того, каким образом выбрана метрика, может зависеть, будет ли решение y устойчиво при изменении f или нет, а следовательно, будет ли задача $y = R(f)$ корректна.

В качестве примера рассмотрен интегральный оператор Фредгольма второго рода

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)y(t)dt + f(x). \tag{2}$$

Пусть ядро $K(x,t)$ непрерывно, а λ не является собственным значением. Рассмотрим метрические пространства Y и F непрерывных на $[a,b]$ функций с метрикой

$$\rho_Y(y_1, y_2) = \sup_{[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)|\,, \tag{3}$$

$$\rho_F(f_1, f_2) = \sup_{[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|\,. \tag{4}$$

Известно, что решение $y \in Y$ уравнения определяется однозначно $f \in F$ и имеет вид

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b R(x,t,\lambda)f(t)dt + f(x).$$

где $R(x,t,\lambda)-$ непрерывная функция. Решение задачи устойчиво, то есть малому изменению $f(x)$ соответствует малое изменение $y(x)$. Таким образом, задача является корректно поставленной.

Рассмотрено интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int\limits_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x), \quad a \le x \le b. \tag{5}$$

В предположении, что ядро $K(x,t)-$ функция непрерывная по переменным $x \in [a,b]$ и $t \in [a,b]$, решение $y(x)-$ непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция.

Метрические пространства Y и F непрерывных на $[a,b]$ функций с метриками (3), (4). Показано, что задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода в этом случае некорректно поставлена.

Для того, чтобы это показать, в частности, можно рассмотреть первое условие корректности, это условие существования решения для любой непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$. Это условие не выполняется, существует бесконечно много непрерывных функций, для которых решения нет. Рассмотрим это утверждение на примере.

Пусть ядро $K(x,t)$ таково, что существует производная $K'_x(x_0,t)$, $x_0 \in (a,b)$ для любого $t \in [a,b]$. Тогда существует производная

$$\left(\int\limits_a^b K(x,t)y(t)dt \right)' \Bigg|_{x=x_0}$$

для любой непрерывной функции $y(x)$. Теперь в качестве $f(x)$ возьмем непрерывную функцию такую, что $f'(x)|_{x=x_0}$ не существует. Тогда очевидно, что решение интегрального уравнения (5) не существует.

В работе рассмотрен пример невыполнения третьего условия корректности задачи, то есть, условия устойчивости решения.

Этот пример показывает, что решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода неустойчиво относительно возмущения функции $f(x)$. Поэтому, уравнение (5) принадлежит к классу некорректно поставленных задач или, как принято для краткости говорить, является некорректной задачей.

В работе рассмотрено несколько методов нахождения приближенного решения интегральных уравнений. Как известно, самыми простыми методами являются методы, которые сводят решение к системе алгебраических уравнений.

Существует важный класс интегральных уравнений, которые решаются путем сведения к системе алгебраических уравнений.

Метод вырожденных ядер.

Ядро интегрального уравнения называется вырожденным, если оно представляет собой сумму конечного числа слагаемых, каждое из которых, в свою очередь, есть произведение двух сомножителей, причем один из них зависит только от x, а другой только от t, то есть,

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t). \tag{6}$$

Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром можно представить в следующей форме:

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t) \right] y(t)dt + f(x). \tag{7}$$

Введем обозначения

$$C_i = \int\limits_a^b \beta_i(t)y(t)\ dt, \quad i = 1, 2, ...n. \tag{8}$$

Тогда уравнение (7) представимо в виде:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i \alpha_i(x), \tag{9}$$

где C_i- неизвестные постоянные, так как функция $y(x)$ неизвестна. Таким образом, решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к нахождению постоянных C_i $(i = 1, 2, ...n)$. С этой целью подставим выражение (9) в интегральное уравнение. После преобразований, учитывая линейную независимость функций $\alpha_i(x)$ $(i = 1, 2, ...n)$, получаем

$$C_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \int\limits_a^b \alpha_k(t)\beta_i(t)dt = \int\limits_a^b \beta_i(t)f(t)dt = 0, \quad i = 1, 2, ...n.$$

Введем для краткости обозначения

$$\alpha_{i,k} = \int\limits_a^b \alpha_k(t)\beta_i(t)dt, \quad i, k = 1, 2, ...n; \tag{10}$$

$$f_i = \int\limits_a^b \beta_i(t)f(t)dt = 0, \quad i = 1, 2, ...n. \tag{11}$$

И получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (1-\lambda\alpha_{11})C_1 - \lambda\alpha_{12}C_2 - \ldots - \lambda\alpha_{1n}C_n = f_1, \\ -\lambda\alpha_{21}C_1 + (1-\lambda\alpha_{22})C_2 - \ldots - \lambda\alpha_{2n}C_n = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda\alpha_{n1}C_1 - \lambda\alpha_{n2}C_2 - \ldots + (1-\lambda\alpha_{nn})C_n = f_n. \end{cases} \tag{12}$$

Таким образом, для определения постоянных C_i получили систему n алгебраических уравнений с n неизвестными. Решив эту систему, решим и уравнение (7). Решение этого уравнения задается формулой (9). Если же система (**??**) неразрешима, то не имеет решения и интегральное уравнение (7).

Метод квадратур.

Для решения интегральных уравнений можно применять метод замены интеграла, входящего в уравнение, конечной суммой, используя квадратурные формулы

$$\int\limits_a^b F(x)dx = \sum_{j=1}^{n} A_j F(x_j) + R(F), \tag{13}$$

здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n-$ узлы сетки, $A_1, A_2, \ldots, A_n-$ коэффициенты, не зависящие от функции $F(x)$, $R(F)-$ остаточный член квадратурной формулы. Запишем уравнение (2) в узлах сетки

$$y(x_i) - \lambda \int\limits_a^b K(x_i, t) y(t) dt = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Заменим в уравнениях (14) интеграл с помощью квадратурной формулы. Отбросим в системе λR_i, получим линейную систему алгебраических уравнений для нахождения приближенных значений Y_i решения $y(x)$ в узлах $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$Y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} Y_j = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

здесь использованы обозначения $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $f_i = f(x_i)$. Решив систему (15) мы найдем значения $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ по которым интерполяцией получим приближенное решение уравнения (2) на отрезке $[a, b]$. В качестве аналитического приближения решения уравнения (2) можно взять функцию

$$Y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_j) Y_j, \tag{16}$$

принимающую в узлах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

Значения коэффициентов A_i и абсцисс x_i в квадратурной формуле (13) определяются квадратурной формулой.

Метод квадратур применим и для интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В этом случае интеграл будет сводится к системе

$$\sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} Y_j = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

По решению этой системы строится решение уравнения.

Метод последовательных приближений.

Рассмотрим метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt. \tag{17}$$

В качестве нулевого приближения можно брать любую функцию, например,

$$y_0(x) = f(x).$$

Нулевое приближение подставим в правую часть уравнения (17) и полученный результат примем за новое приближение:

$$y_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y_0(t) dt.$$

Первое приближение опять подставим в правую часть уравнения (17), и так далее. Если получено n-ое приближение $y_n(x)$, то за $(n+1)$-ое приближение мы примем результат подстановки $y_n(x)$ в правую часть уравнения (17). Таким образом, последовательные приближения определяются рекуррентным соотношением

$$y_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t) y_n(t) dt. \tag{18}$$

Функции $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ рассматриваются как приближения к искомому решению уравнения. Если последовательные приближения равномерно стремятся к некоторому пределу, то этот предел и есть решение уравнения (17); если этот предел не существует, то применять метод последовательных приближений, очевидно, не имеет смысла.

Например, если ядро ограничено, то есть, существует такая константа A, что $|K(x,t)| < A$ при всех x и t. В этом случае последовательные приближения равномерно сходятся при всех комплексных значениях λ, лежащих внутри круга $|\lambda| < \frac{1}{A(b-a)}$. Существуют и более сильные утверждения.

Для интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int\limits_a^b K(x,t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \tag{19}$$

Последовательность $\{y_n(x)\}$ задается соотношениями:

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \lambda \left[f(x) - \int\limits_a^b K(x,t) y_n(t) dt \right], \tag{20}$$

где $0 < \lambda < 2\lambda_1$, λ_1- наименьшее характеристическое число.

Метод итерированных ядер.

Если в методе последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма второго рода, в качестве нулевого приближения взять свободный член уравнения

$$y_0(x) = f(x),$$

то для $n-$го приближения получается формула:

$$y_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int\limits_a^b K_m(x,t) f(t) dt, \tag{21}$$

где $K_m(x,t)$ определяется рекуррентным соотношением

$$K_1(x,t) = K(x,t), \quad K_m(x,t) = \int\limits_a^b K(x,s) K_{m-1}(s,t) ds.$$

Функция $K_m(x,t)$ называется m-ым итерированным ядром по отношению к исходному ядру. Для него справедливо более общее соотношение:

$$K_m(x,t) = \int\limits_a^b K_r(x,s) K_{m-r}(s,t) ds,$$

где $r-$ любое натуральное число, меньшее m.

Предполагая, что последовательные приближения сходятся, переходя к пределу в (21), получаем решение интегрального уравнения (17) в виде

$$y(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int\limits_a^b K_m(x,t) f(t) dt.$$

Функция

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} \int\limits_a^b K_m(x,t)$$

называется резольвентой, если ряд сходится. В этом случае решение представимо через резольвенту

$$y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b R(x,t,\lambda) f(t) dt.$$

Работа содержит программную часть. Написаны программы для решения интегральных уравнений Фредгольма.

Подробно рассмотрено уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_0^1 K(x,t)y(t)dt = \sin \pi x,$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} (1-x)t, \ 0 \leq t \leq x, \\ x(1-t), \ x \leq t \leq x. \end{cases}$$

Ядро этого уравнения вещественное и симметричное. Определены характеристические числа, найдены собственные функции. Используя теорему Пикара, доказано существование и единственность решения этого уравнения. Найдено и точное решением этого уравнения: $y(x) = \pi^2 \sin \pi x$.

Для уравнения Фредгольма первого рода написана программа на основе метода квадратур. В работе приведен результат работы программы. Приближенное решение сравнивается с точным решением в узлах решетки. Кроме того, для наглядности сравнения точного решения и приближенного решения приводятся графики этих функций в одной системе координат. Для исследования устойчивости для свободного члена вводится возмущение.

Сравнивая точное решение интегрального уравнения с приближенным решением, замечаем очень большую погрешность, а приближенные решения возмущенных задач, дают еще большую погрешность. Как видим, использование метода квадратур для конкретного интегрального уравнения Фредгольма первого рода не эффективно.

Для уравнения Фредгольма второго рода написаны две программы, одна на основе метода квадратур, другая – на основе метода последовательных приближений. Эти программы вычисляют приближенные решения для двух разных уравнений. В результате решений в каждом случае получены маленькие погрешности. Сравнение результатов с точным решением иллюстрируется и графически в том числе. При исследовании устойчивости решения для свободного члена вводятся различные возмущения.

Сравнивая точное решение интегрального уравнения с приближенным решением, и даже приближенными решениями возмущенных задач, мы видим эффективность используемых приближенных методов для конкретных интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Заключение. В работе изучены численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода. Особое внимание уделено базовым методам. Освоена методика выбора метода решения уравнения в зависимости от типа уравнения и характеристических особенностей уравнения.

Написаны программы для нахождения приближенных решений уравнений Фредгольма. Наглядно продемонстрирована устойчивость решений уравнений Фредгольма второго рода и отсутствие устойчивости у уравнений Фредгольма первого рода, а следовательно и некорректность задачи.