МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Задача рассеяния для системы Захарова-Шабата
наименование темы курсовой работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Чащина Егора Алексеевича
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________ М.Ю.Игнатьев
должность, уч. степень, уч. звание — подпись,дата — инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф-м.н., профессор ____________ В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч.звание — подпись, дата — инициалы, фамилия

Саратов 2020

Введение. Задача рассеяния состоит в построении коэффициента отражения S при заданных значениях u и α, в то время как обратная задача рассеяния состоит в восстановлении потенциала u и постоянной α из коэффициента отражения S. Более общая постановка вопроса состоит в том, чтобы изучить свойства отображений рассеяния $(u, \alpha) \mapsto S$ и $S \mapsto (u, \alpha)$ соответственно.

Цель. Основной целью данной работы является разработка теории прямой и обратной задачи рассеяния для систем 2x2 ZS-AKNS (изученных Захаровым и Шабатом, Абловитцем, Каупом, Ньюэллом, и Сегуром в 1970-х годах) на полуоси при минимальных предположениях интегрируемости потенциалов и общих симметричных граничных условиях. А именно, рассматриваемая задача рассеяния задается системой ZS-AKNS

$$y' = Qy + ik\sigma_3 y \tag{1}$$

и граничным условием

$$e^{-i\alpha} y_1(0,k) - e^{i\alpha} y_2(0,k) = 0, \alpha \in [0, \pi). \tag{2}$$

Здесь $k \in C$ - спектральный параметр,

$$\sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Q(x) := \begin{pmatrix} 0 & u(x) \\ \overline{u(x)} & 0 \end{pmatrix}, y(x,k) := \begin{pmatrix} y_1(x,k) \\ y_2(x,k) \end{pmatrix},$$

а комплексный потенциал u принадлежит банахову пространству $L^1(R_+) \cap L^p(R_+)$, с фиксированным $p \in [1, \infty)$.

Структура ВКР. Данная работа состоит из 2 разделов:
1) В первом разделе рассматривается задача рассеяния, изучаются свойства коэффициента отражения. Также получено уравнение Марченко, связывающее ядро оператора преобразования и коэффициента отражения.
2) Во втором разделе рассматривается обратная задача рассеяния.

Основное содержание работы.

Прямая задача рассеяния

Решение Йоста Ψ является матричным решением 2x2 уравнения (1) для вещественных ненулевых k, подчиняющееся асимптотике

$$\Psi(x,k) = exp(ikx\sigma_3)(1+o(1)), x \to \infty \tag{3}$$

Столбцы $\psi_1 := (\psi_{11}, \psi_{21})^t$ и $\psi_2 := (\psi_{12}, \psi_{22})^t$ решения Йоста образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Далее мы вводим коэффициент отражения S, требуя, чтобы решение

$$\varphi(x,k) := \psi_1(x,k) + S(k)\psi_2(x,k)$$

из (1) удовлетворяло граничному условию (2); φ называется рассеивающим решением уравнения (1). Для решения уравнения (1), справедлива асимптотика:

$$\varphi(x,k) = \left[e^{ikx}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + S(k)e^{-ikx}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right](1+o(1)), x \to \infty.$$

Полезно выделить главную часть решения Йоста Ψ системы (1), положив

$$\Psi(x,k) = M(x,k)exp(ikx\sigma_3), \tag{4}$$

где M принимает значения в $M_2(C)$; тогда M удовлетворяет уравнению

$$M' = ik(\sigma_3 M - M\sigma_3) + QM \tag{5}$$

и имеет место асимптотика

$$M(x,k) = I(1+o(1)), x \to \infty \tag{6}$$

Решение (5) обладает очень полезным интегральным представлением, которое дает стандартное треугольное представление решений Йоста.

Предложение 1. Предположим, что $u \in X_p^+$ ($X_p^+ := L^1(R_+) \cap L^p(R_+)$ банахово пространство) . Тогда имеет место следующее: (i) для любого $k \in R$, задача (5)-(6) имеет единственное решение; (ii) это решение $M(\cdot, k)$ имеет интегральное представление

$$M(x,k) = I + \int_0^\infty \Gamma(x,\zeta) exp(2ik\zeta\sigma_3) d\zeta$$

с некоторым матричным ядром Γ; кроме того, отображение

$$R_+ \ni x \mapsto \Gamma(x,\cdot) \in X_p^+ \otimes M_2(C)$$

является непрерывным; (iii) ядро Γ удовлетворяет оценкам

$$\|\Gamma(x,\cdot)\|_{L^1(R_+)} \leq exp(\eta(x)) - 1,$$

$$\|\Gamma(x,\cdot)\|_{L^p(R_+)} \leq exp(\eta(x))\gamma(x),$$

где

$$\eta(x) = \int_x^\infty \|u(\zeta)\| d\zeta, \gamma(x) = [\int_x^\infty \|u(\zeta)\|^p d\zeta]^{1/p}.$$

Наконец, для любого фиксированного $x \in R_+$, отображение $u \mapsto \Gamma(x,\cdot)$ из X_p^+ в $X_p^+ \otimes M_2(C)$ непрерывно.

Следствие 2. Для любого действительного k, решение Йоста Ψ системы (1) допускает представление

$$\Psi(x,k) = [I + \int_0^\infty \Gamma(x,\zeta) exp(2ik\zeta\sigma_3) d\zeta] exp(ikx\sigma_3), \tag{7}$$

где Γ из предложения 1.

Предложение 3. Пусть функция u и ядро Γ те же, что в предложении 1; тогда $u(x)$ =-$\Gamma_{12}(x,0) = -\overline{\Gamma_{21}(x,0)}$, так что

$$Q(x) = -\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{12}(x,0) \\ \Gamma_{21}(x,0) & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Введём функцию Йоста s через

$$s(k) := e^{-i\alpha}\Psi_{11}(0,k) - e^{i\alpha}\Psi_{21}(0,k);$$

В силу следствия 2 функция Йоста s может быть записана как

$$s(k) = e^{-i\alpha} + \int_0^\infty (e^{-i\alpha}\Gamma_{11}(0,\zeta) - e^{i,\alpha}\Gamma_{21}(0,\zeta))e^{2ik\zeta}d\zeta$$

используя теперь свойства ядра Γ предложение 1 получаем следующее представление.

Следствие 4. Для каждого $u \in X_p^+$ существует такое $f \in X_p^+$, что соответствующую функцию Йоста s можно записать в виде

$$s(k) = e^{-i\alpha} + \int_0^\infty f(\zeta)e^{2ik}\zeta d\zeta \tag{9}$$

Интегральное представление (9) показывает, что функция s является граничным значением функции комплексной переменной z, определённой в замкнутой верхней полуплоскости $\overline{C_+}$ по формуле

$$s(z) := e^{-i\alpha} + \int_0^\infty f(\zeta)e^{2iz}d\zeta \tag{10}$$

ясно, что эта функция непрерывна и ограничена в $\overline{C_+}$, а также аналитическая в C_+.

Далее мы обозначим через $\hat{X}_p$ банахову алгебру преобразований Фурье функций из X_p с поточечным умножением и через $1+\hat{X}_p$ унитальное расширение $\hat{X}_p$, полученное присоединением постоянных функций. Аналогичным образом вводим банахову алгебру $\hat{X_p^+}$ преобразований Фурье функций из X_p^+ и её унитальное расширение $1+\hat{X_p^+}$.

Лемма 5. Предположим, что $f = \beta + \hat{g}$, где $\beta \in C$ и $g \in X_p$ (соответственно, $g \in X_p^+$), является элементом банаховой алгебры $1 + \hat{X}_p$ (соответственно, банаховой алгебры $1 + \hat{X_p^+}$). Тогда f обратимо в $1 + \hat{X}_p$ (соответственно, в $\hat{X_p^+}$ тогда и только тогда, когда $\beta \neq 0$ и f не обращается в нуль на R (соответственно на $\overline{C_+}$).

Следствие 6. Функция Йоста s является обратимым элементом банаховой алгебры $1 + \hat{X_p^+}$. Следовательно, существует такой элемент $g \in X_p^+$, что

$$s^{-1}(z) = e^{i\alpha} + \int_0^\infty g(\zeta)e^{2iz\zeta}d\zeta \tag{11}$$

для всех $z \in \overline{C_+}$.

Используя формулы (9) и (11), получим следующее представление для коэффициента отражения S.

Предложение 7. Предположим, что $u \in X_p^+$; тогда существует $F \in X_p$ такая, что коэффициент отражения S принимает вид

$$S(k) = e^{-2i\alpha} + \int_{-\infty}^\infty F(\zeta)e^{2ik\zeta}d\zeta. \tag{12}$$

Теорема 8. $W_R(S) = 0$, где $W_R(S) := \frac{logS(+\infty) - logS(-\infty)}{2\pi i}$.

По заданной функции F из (12), определим

$$\Omega(x) := \begin{pmatrix} 0 & \overline{F(x)} \\ F(x) & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Лемма 9. Предположим, что $u \in X_p^+$; тогда ядро Γ и матрица Ω удовлетворяют уравнению Марченко

$$\Gamma(x,\zeta) + \Omega(x+\zeta) + \int_0^\infty \Gamma(x,t)\Omega(x+t+\zeta)dt = 0 \tag{14}$$

почти для всех $\zeta > 0$.

Обратная задача рассеяния

Мы будем говорить, что коэффициент $S : R \to C$ принадлежит пространству S_p тогда и только тогда, когда
(1) существуют $F \in X_p$ и $\beta \in [0;\pi)$ такие, что для всех $k \in R$ выполняется

$$S(k) = e^{-2i\beta} + \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) e^{2ik\zeta} d\zeta; \tag{15}$$

(2) коэффициент S унимодулярен на R, т.е. $(S(k))^{-1} = \overline{S(k)}$, для всех вещественных k;
(3) $W_R(S) = 0$.

Существует корректно определённое отображение

$$\mathscr{S}_p : U_p \to S_p$$

которое каждой системе ZN-AKNS (1)-(2), определяемой $(u, \alpha) \in U_p$, ставит в соответствие коэффициент отражения $S \in S_p$. Основные результаты работы сформулированы в следующих двух теоремах, которые характеризуют образ отображения $\mathscr{S}_p$ и утверждают его непрерывность.

Теорема 10. Коэффициент S является коэффициентом отражения задачи (1)-(2), соответствующей некоторому $(u, \alpha) \in U_p$, тогда и только тогда, когда S принадлежит S_p и число β в его интегральном представлении (15) равно α.

Теорема 11. Отображение $\mathscr{S}_p$ является гомеоморфизмом.

Доказательство теорем 10, 11 основывается на следующих соображениях.

Предположим, что S - фиксированный коэффициент из S_p; по определению S допускает представление (15), где $F \in X_p$ и $\beta \in [0;\pi)$. Другими словами, F задана равенством

$$F(\zeta) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(S(k)-e^{-2i\beta})e^{-2ik\zeta}dk. \tag{16}$$

Далее мы формируем матричную функцию

$$\Omega(x) := \begin{pmatrix} 0 & \overline{F(x)} \\ F(x) & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Для $S \in S_p$ соответствующего $F \in X_p$ и $\beta \in [0,\pi)$ в (15), мы строим матричное ядро Ω в (17) и затем рассматриваем интегральное уравнение(см. уравнение (14))

$$\Gamma(x,\zeta)+\Omega(x+\zeta)+\int_0^{\infty}\Gamma(x,t)\Omega(x+t+\zeta)dt = 0, x \geq 0 \tag{18}$$

Обозначив через $g := (\Gamma_{11}, \Gamma_{12})$ и $f = (0, F)$ первые строки матриц Γ и Ω соответственно, получим уравнение

$$g(x,\cdot)+f(x+\cdot)+H_{\Omega}(x)g(x,\cdot) = 0, x \geq 0. \tag{19}$$

Можно показать, что для каждого $x \geq 0$, уравнение (19) имеет единственное решение $g(x,\cdot)$, принадлежащее X_p^+; тогда, исходя из предложения 3, возьмём

$$u(x) := -\Gamma_{12}(x,0) \tag{20}$$

как предполагаемый потенциал системы ZS-AKNS.

Лемма 12. Предположим, что $S \in S_p$ связан с $F \in X_p$ и $\beta \in [0,\pi)$ соотношением (16), сформировав ядро матрицы Ω по формуле (17), и решим уравнение Марченко (18). Тогда коэффициент рассеяния системы ZS-AKNS (1) с потенциалом u, заданным (20) и подчинённым граничным условиям (2) при $\alpha := \beta$, совпадает с S.

Заключение. В данной работе мы вывели интегральное представление решения Йоста, описали свойства коэффициента отражения S и вывели соответствующее уравнение Марченко. Далее мы обсудили свойства некоторых возникающих при решении обратной задачи интегральных операторов и доказали разрешимость уравнения Марченко. Затем мы обосновали алгоритм восстановления потенциальной функции u и константы α по заданному коэффициенту отражения S и доказали теоремы, дающие характеризацию образа и утверждающие непрерывность отображения рассеяния.