МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ ПО МОДЕЛИ У. ШАРПА

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Вдовенковой Алены Александровны

Научный руководитель
ст. преподаватель ______________ Н. В. Сергеева

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2020

ВВЕДЕНИЕ

С целью уменьшения риска потери вложенных денежных средств и получения большей прибыли инвесторы создают специальные портфели ценных бумаг. При этом, процесс управления портфелем ценных бумаг влечет за собой риск принятия решения, что в свою очередь чревато большими убытками. Для снижения вероятности проявления такого риска существуют стратегии управления портфелем, основанные на моделях оценивания финансовых активов, их рискованности и соразмерности риска с доходностью.

Как раз одной из основных задач портфельной теории является нахождение именно таких моделей формирования максимально эффективного портфеля ценных бумаг, то есть портфель, с наибольшей ожидаемой доходностью для заданного уровня риска или наименьшим риском при заданном значении ожидаемой доходности. Процесс формирования портфеля можно разделить на два этапа, рассмотрим их.

Г. Марковиц и У. Шарп являются создателями теоретических концепций формирования и управления портфеля ценных бумаг. Впервые модель оценки инвестиционного портфеля была разработана Г. Марковицем, а позже У. Шарпом, была создана рыночная однофакторная модель. Предположив существование линейной связи между курсом акции и определенным индексом, можно при помощи прогнозной оценки значения индекса определить ожидаемый курс акций.

Актуальность работы обеспечивается тем, что с помощью этой модели можно составить инвестиционный пакет финансовых активов, позволяющий найти вариант размещения средств оптимальным образом.

Целью бакалаврской работы является анализ основных методов образования оптимального портфеля ценных бумаг.

Основными задачами, поставленными для достижения цели, можно считать:

- изучение современных подходов к формированию портфеля ценных бумаг;
- тестирование модели У. Шарпа формирования портфеля ценных бумаг.

Объект исследования - модель У. Шарпа формирования портфеля ценных бумаг.

Практическая значимость этой работы заключается в том, что разработанный программный продукт можно использовать в дальнейшем для решения задач инвестирования.

По данным задачам были составлены разделы и подразделы работа.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 22 наименований, и шести приложений. Общий объем работы составляет 69 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

Первый раздел знакомит с теорией портфельного инвестирования в целом.

Инвестиции в ценные бумаги связанны с риском того, что фактическая доходность может отличаться от ожидаемой доходности. Что в свою очередь является толчком для рассмотрения доходности R ценной бумаги, соответствующую некоторому периоду владения, как случайную величину, а выбор инвестиционной стратегии осуществлять на основе анализа ее числовых характеристик. Математическое ожидание $m = M[R]$ доходности актива соответствует ожидаемой доходности, а дисперсия $\sigma^2 = D[R]$ или среднеквадратичное отклонение σ доходности могут использоваться как меры риска вложений в данный актив.

Выбор портфеля ценных бумаг на основе учета его ожидаемой доходности и риска известен как подход «доходность-риск», который впервые был сформулирован Г. Марковицем. Дальнейшее развитие подход получил благодаря работам У. Шарпа, Дж. Тобина и др.

При таком подходе ожидается, что инвестор стремится максимизировать ожидаемую доходность портфеля при заданном уровне риска, либо минимизировать риск при заданном уровне ожидаемой доходности в силу диверсификации вложений.

Пусть инвестор вкладывает свой капитал в покупку n видов ценных бумаг, сформировав тем самым портфель ценных бумаг. Предположим, что x_i – это доля общего вложения, которая приходится на i-й вид ценных бумаг, $i = \overline{1,n}$. То есть, $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ будет определять структуру портфеля ценных бумаг.

Допустим, что R_i – это случайная величина доходности ценных бумаг i-го вида, как если бы весь капитал инвестора был бы целиком вложен в их покупку, $i = \overline{1,n}$. Тогда случайная величина R_p доходности портфеля со структурой, задаваемой вектором $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, есть очевидно

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i.$$

То есть, ожидаемая доходность такого портфеля соответствует формуле

$$m_p = M[R_p] = \sum_{i=1}^{n} x_i M[R_i] = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \qquad (1)$$

где $m_i = M[R_i]$ – ожидаемая доходность от ценных бумаг i-го вида, если бы в них вложили весь капитал.

Отклонение случайной величины доходности портфеля от ожидаемой доходности есть случайная величина

$$R_p - m_p = \sum_{i=1}^{n} x_i (R_i - m_i).$$

Выразим математическое ожидание квадрата этого отклонения, то есть дисперсию случайной величины R_p

$$D_p = M[(R_p - m_p)^2] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j, \qquad (2)$$

где величины $V_{ij} = M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)]$ являются ковариациями случайных величин R_i и R_j. Очевидно, что значения

$$V_{ii} = M[(R_i - m_i)^2] = \sigma^2$$

являются дисперсиями случайных величин R_i, а σ_i - соответствующие среднеквадратичные отклонения риска i-х ценных бумаг.

Второй раздел посвящен созданию оптимального инвестиционного портфеля. В этом разделе рассматриваются три основных подхода к формированию оптимального портфеля ценных бумаг.

Модель Марковица

Инвестор выбирает структуру портфеля так, чтобы обеспечить заданное значение ожидаемой доходности, при минимальности риска. Математически эту задачу сформулировал Г. Марковиц.

Предположим, инвестор формирует свой портфель сроком на один период владения из n различных рисковых ценных бумаг. Прогноз ожидаемых доходностей ценных бумаг соответствующего вида задаются вектором $m = (m_1, m_2, ..., m_n)^T$.

Обеспечивается достижение заданной ожидаемой доходности портфеля m_p с минимальным риском, нахождением структуры $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ портфеля. С учетом формул (1), (2) математическая формулировка задачи имеет вид:

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \min_x, \tag{3}$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1, \quad m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n = m_p. \tag{4}$$

Обозначим $I = (1, 1, ..., 1)^T \in R^n$ и перепишем задачу (3) – (4) в матричной форме:

$$D_p = x^T V_x \to \min_x, \tag{5}$$

$$I^T x = 1, \quad m^T x = m_p. \tag{6}$$

Выражения (5) – (6) – формализованное описание задачи Марковица отыскания оптимального портфеля ценных бумаг.

Вектор x^*, являющийся решением задачи (5) – (6), определяет структуру оптимального портфеля среди всех возможных портфелей с ожидаемой доходностью m_p.

Портфель ценных бумаг со структурой, определяемой следующей формулой, называется оптимальным по Марковицу.

$$x^* = b + cm_p, \tag{7}$$

где b и c – векторы размерности n:

$$b = \frac{1}{d}(a_{22}V^{-1}I - a_{12}V^{-1}m),$$

$$c = \frac{1}{d}(a_{11}V^{-1}m - a_{12}V^{-1}I),$$

а d и a_{ij} – следующие числовые значения:

$$a_{11} = I^TV^{-1}I, \quad a_{12} = I^TV^{-1}m,$$

$$a_{22} = m^TV^{-1}m, \quad d = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

Портфель ценных бумаг со структурой, определяемой по формуле (7), будем называть *оптимальным по Марковицу*. Ему соответствует минимальная дисперсия доходности портфеля, определяемая по формуле

$$\sigma_p^2 - x^{*T}Vx^* = m_p^2c^TVc + 2m_pb^TVb. \tag{8}$$

При невозможности операции «короткая продажа» будет необходимо наложить дополнительное ограничение на структуру портфеля следующим образом $x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}$. Для решения получаемой задачи используются приближенные численные методы.

Портфели оптимальные по Марковицу (5) – (6), есть эффективные портфели ценных бумаг, или оптимальные по Марковвицу портфели.

Модель Тобина

Обозначим:

m_0 – ставка доходности безрискового актива за один период владения (безрисковая ставка), если бы весь капитал был вложен в данный актив;

x_0 – доля безрисковых вложений и соответственно доля рисковых вложений инвестора;

R_r – случайная величина доходности портфеля, составленного только из рисковых активов, если бы весь капитал был вложен в него;

$m_r = M[R_r]$, $D_r = M[(R_r - m_r)^2]$, $\sigma_r = (D_r)^{\frac{1}{2}}$ - ожидаемая доходность, дисперсия доходности и риск портфеля из рисковых активов, на который приходится доля капитала инвестора равная $1 - x_0$. Считаем, что

$$m_r > m_0, \quad \sigma_r > 0.$$

Величина $1-x_0$ характеризует отношение инвестора к риску: чем больше значение $1-x_0$, тем больше доля рисковых вложений, а значит, и больше склонность инвестора к риску.

Из ограничения $x_0 \leq 1$ следует возможность для инвестора двух противоположных операций с нулевым риском:

— операции кредитования под безрисковую ставку m_0, причем $0 < x_0 \leq 1$;

— операции заимствования по безрисковой ставке m_0, в данном случае $x_0 < 1$.

Характеристики комбинированного портфеля:

— случайная величина доходности портфеля

$$R_p = x_0 m_0 + (1 - x_0) R_r; \tag{9}$$

— ожидаемая доходность портфеля

$$m_p = x_0 m_0 + (1 - x_0) m_r; \tag{10}$$

— дисперсия доходности портфеля

$$\sigma_p^2 = D(R_p) = (1 - x_0)\sigma_r^2; \tag{11}$$

— риск портфеля

$$\sigma_p = (1 - x_0)\sigma_r. \tag{12}$$

Свойства комбинированного портфеля:

Из (10) следует

$$m_p - m_0 = (1 - x_0)(m_r - m_0), \tag{13}$$

где $m_p - m_0$ и $m_r - m_0$ – дополнительная доходность или премия за риск.

По (13) премия за риск портфеля активов прямо пропорциональна премии за риск рисковой части портфеля и тем больше, чем больше доля рисковых вложений.

Из (12) следует, что если инвестор желает уменьшить риск вложений до некоторой величины $\sigma_p < \sigma_r$ и владеет портфелем рисковым портфелем с характеристиками (m_r, σ_r), то он обязательно вкладывает в безрисковый актив долю своего капитала, равную

$$x_0 = 1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_r}. \tag{14}$$

Из (13), с учетом (14), получаем

$$m_p = m_0 - \frac{m_r - m_0}{\sigma_r}\sigma_p. \tag{15}$$

Из (15) видно, что ожидаемый риск σ_p и доходность m_p портфеля, после распределения капитала между безрисковым активом и уже заданным рисковым портфелем, связаны прямой линейной зависимостью.

Тогда, задачу формирования комбинированного портфеля с и минимальным риском и заданным уровнем ожидаемой доходности m_p можно записать в виде

$$D_p = x^T V x \to \min_x, \tag{16}$$

$$x_0 + I^T x = 1, \quad m_0 x_0 + m^T x = m_p. \tag{17}$$

Формулы (16), (17) есть задача Дж. Тобина.

Формулу оптимальной структуры комбинированного портфеля можно записать в виде

$$x^* = \frac{(m_p - m_0)}{g_p^2} V^{-1}(m - m_0 I), \tag{18}$$

где

$$g_p^2 = (m - m_0 I)^T V^{-1}(m - m_0 I).$$

Модель Шарпа

Прогнозные значения данных характеристик строятся на основе имеющихся «исторических» значений доходностей $R_{it}, i = 1, 2, ...n, \quad t = 1, 2, ..., T$

за предшествующие периоды.

Прогнозные значения m и V представляют собой выборочные оценки вида

$$\tilde{m} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t, \quad \tilde{V} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \tilde{m})^T(R_t - \tilde{m}), \tag{19}$$

$$R_t = (R_{1t}, R_{2t}, ..., R_{nt})^T.$$

Но такой подход неприменим из-за недостаточного объема данных для оценивания всех неизвестных параметров.

Число оцениваемых параметров вектора m и матрицы V с учетом ее симметричности равно $n(n+3)/2$.

Объем выборки M равен nT. Формулы (19) неприменимы, если число совместно анализируемых активов велико, а объем данных мал, то есть когда $T < (n+3)/2$.

Пусть для i-го актива его доходность R_{it} за период t (например месяц, квартал, год и т.д.) связана с доходностью индексного портфеля R_{It} за тот же период простой линейной регрессии вида

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{It} + \xi_{it}, \quad i = \overline{1,n}, \quad t = 1, 2, ..., T, \tag{20}$$

где $\{\alpha_i, \beta_i\}$ – параметры модели: α_i – свободный член, β_i – коэффициент регрессии.

Как доходность индексного портфеля можно использовать темп прироста некоторого рыночного индекса.

Характеристики ценных бумаг будем искать следующим образом. Пусть m_I – ожидаемая доходность индексного портфеля, $D_I = \sigma_I^2$ – дисперсия случайной величины его доходности.

Отметим, что в соответствии с моделью (20) и предположением 1:

$$m_i = \alpha_i + \beta_i m_I. \tag{21}$$

Далее, используя (20) и (21)

$$V_{Ii} = V(R_{it}, R_{It}) = M[(R_{it} - m_i)(R_{It} - m_I)] =$$
$$= \beta_i M[(R_{It} - m_I)(R_{It} - m_I)] + M[\xi_{it}(R_{It} - m_I)] = \beta_i D_I + V(\xi_{it}, R_{It}) = \beta_i \sigma_I^2.$$

Получаем

$$\beta_i = \frac{V_{Ii}}{\sigma_I^2}. \tag{22}$$

Теперь проведем сам процесс вычисления характеристик.

1. Сначала получаем статистические (прогнозные) значения

$$\tilde{m}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{it}, \quad \tilde{m}_I = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{It}, \tag{23}$$

Используя оценки (23), можем получить соответствующие оценки для $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{V}_{Ii}$:

$$\tilde{\sigma}_I^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{It} - \tilde{m}_I)^2, \tag{24}$$

$$\tilde{V}_{Ii} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - \tilde{m}_i)^T (R_{It} - \tilde{m}_I). \tag{25}$$

2. Далее, используя (24) и (25), в соответствии с (22) получаем оценку для коэффициентов регрессии

$$\tilde{\beta}_i = \frac{\tilde{V}_{Ii}}{\tilde{\sigma}_I^2}. \tag{26}$$

Так как в силу (21) $\alpha_i = m_i - \beta_i m_I$, то можем получить статистические оценки и для α_i :

$$\tilde{\alpha}_i = \tilde{m}_i - \tilde{\beta}_i \tilde{m}_I \tag{27}$$

3. Таким образом, испозьзуя (26) и (27), получаем статистические оценки для $\tilde{\psi}_i^2$ – дисперсии случайной величины ξ_{it} :

$$\tilde{\psi}_i^2 = \frac{1}{T-2}\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - \tilde{\alpha}_i - \tilde{\beta}_i R_{It})^2. \tag{28}$$

Теперь, для модели (20) с предположениями 1 – 4 имеем представления

$$m_i = \alpha_i + \beta_i m_I, \tag{29}$$

$$\sigma_i^2 = M[(R_{it} - m_i)(R_{it} - m_i)] = \beta_i^2 \sigma_I^2 + \psi_i^2, \qquad (30)$$

$$V_{ij} = M[(R_{it} - m_i)(R_{jt} - m_j)] = \beta_i \beta_j \sigma_I^2, i \neq j. \qquad (31)$$

Для задачи оптимизации структуры портфеля ценных бумаг, получаем оценки соответствующих характеристик активов, путем подстановки в формулы (29) – (31) вместо неизвестных истинных значений параметров их оценки (23) – (28).

В третьем разделе рассматривается задача построения оптимального портфеля по модели Шарпа. Для решения поставленной задачи была разработана программа, которая позволяет выбирать акции различных компаний и на основе этих данных формирует оптимальные доли капиталовложений для каждой компании.

Сайт был разработанн в среде разработки Microsoft Visual Studio , язык программирования использовался $C\#$ и JavaScript.

Для решения задачи формирования портфеля ценных бумаг использовалась библиотека Microsoft Solver Foundation. Solver Foundation - это библиотека для математического программирования, моделирования и оптимизации.

Для построение графиков использовалась библиотека Chart.js для JavaScript. ChartJS предоставляет красивые плоские дизайны для диаграмм. ChartJS использует элемент HTML5 Canvas для рендеринга и поддерживает все современные браузеры (IE11 +).

При решение задачи было использовано большое количество данных, которые загружались из системы «kaggle.com » и с сайта «finam.ru». Данные брались в csv файлах за период с 2006 – 2018гг. Все файлы загружались в базы данных, а потом использовались для решения.

Для решения задачи были выбраны акции 31 компании за период 2006 – 2018гг. С целью сравнения был выбран индекс ММВБ за тот же период. Для обработки и визуализации входных параметров была создана база данных. Акции в файле записаны в формате «Date, Volume, Name, Open, High, Low, Close». При запуске приложения список всех акций считывается из базы данных. В основе главного окна программы, на рисунке 1, находится панель выбора компаний, каждую из которых можно детально проанализировать.

В центре страницы располагается система координат, которая при выборе компаний строит график для анализа доходностей рассчитанных на момент закрытия или открытия. Также на панели имеется раздел, где можно построить портфель ценных бумаг по выбранным акциям и построить к нему график.

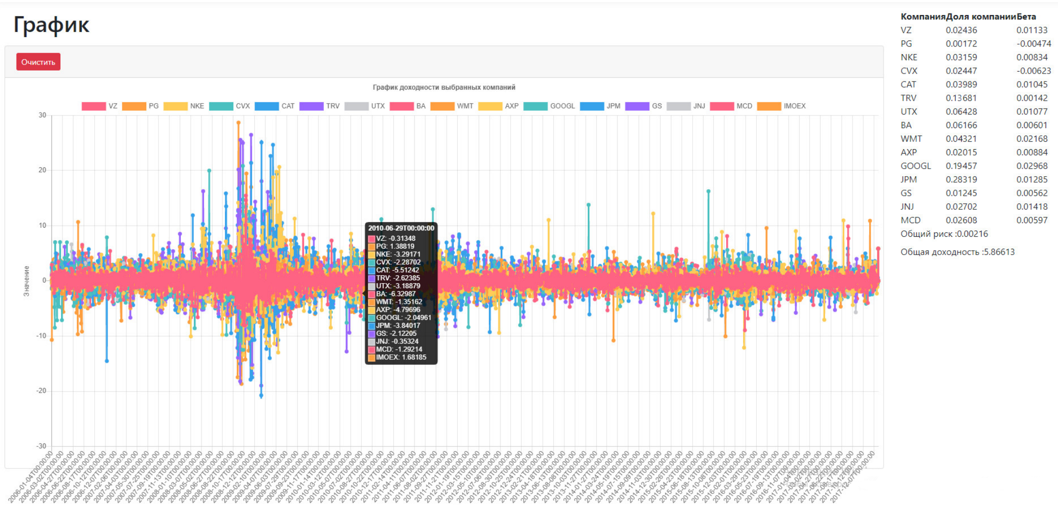

Рисунок 1 – Построение оптимального портфеля

Итак, мы получили портфель, который удовлетворяет условию оптимальной модель У.Шарпа. То есть портфель с минимальным риском, который равен 0.00216, следовательно, мы имеем почти безрисковый портфель акций, который удовлетворяет и второму условию оптимальности по Шарпу – максимальность возможной доходности, и он равная 5.86613 процента.

В заключение проводится анализ работы и анализ достигнутых результатов.

Основные результаты

— В теоретической части бакалаврской работы приведены некоторые числовые характеристики, с помощью которых вычисляется ожидаемая доходность и ожидаемый риск. Рассмотрены разновидности ценных бумаг, формирование портфеля, а также методы формирования оптимального портфеля.

— В практической части сформулирован оптимальный инвестиционный портфель по акциям пятнадцати компаний. Данный портфель, был получен с помощью языков C# и JavaScript.

— В приложения помещены все основные классы программного кода.