МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИЙ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Дружинина Сергея Алексеевича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ______________ И. А. Кузнецова

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В процессе инвестиционной деятельности инвестор неизбежно сталкивается с ситуацией выбора объектов инвестирования с различными инвестиционными характеристиками для наиболее полного достижения поставленных перед собой целей.

Большинство инвесторов при размещении средств выбирают несколько объектов инвестирования, формируя таким образом их определенную совокупность. Целенаправленный подбор таких объектов представляет собой процесс формирования инвестиционного портфеля.

Основная задача портфельного инвестирования — улучшить условия инвестирования, придав совокупности ценных бумаг такие инвестиционные характеристики, которые нед остижимы с позиции отдельно взятой ценной бумаги, и возможны только при их комбинации.

Только в процессе формирования портфеля достигается новое инвестиционное качество с заданными характеристиками. Таким образом, портфель ценных бумаг является тем инструментом, с помощью которого инвестору обеспечивается требуемая устойчивость дохода при минимальном риске.

Целью бакалаврской работы является изучение метода динамического программирования и его применение к задаче оптимального распределения инвестиций.

Объект исследования: различные акции, проекты с меняющейся стоимостью.

Предмет исследования: изменение цен акций с изменением времени.

Для достижения поставленной цели в работе необходимо решить следующие задачи:

–определить основные понятия, связанные с динамическим программированием;

– рассмотреть несколько акций с произвольныи изменением их цены;

– написать программу для оптимального распределения инветиций;

–рассчитать основные практические и теоретические характеристики данной системы;

–провести сравнительный анализ практических и теоретических характеристик

Практическая значимость состоит в том, что на основании написанной программы можно произвести оптимальное портфельное инвестирование, рассчитать математические характеристики доходности и риска. По результатам вычислений получить оптимальный инвестиционный портфель.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, пяти разделов, заключения , списка использованных источников, состоящего из 20 наименований и трех приложений. Общий объем работы составляет 45 страниц.

Основное содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы, формулируются цели работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

В первом разделе рассмотрены основные понятия теории финансового риска.

Инвестиции в ценные бумаги в условиях неопределенности сопряжены с риском того, что фактическая доходность может отличаться от ожидаемой доходности. Это дает основание рассматривать доходность R ценной бумаги, соответствующую некоторому периоду владения, как случайную величину, а выбор инвестиционной стратегии осуществлять на основе анализа ее числовых характеристик: математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения.

Существование двух противоположных целей инвестирования позволяет сделать два важных вывода.

1. При осуществлении финансовых инвестиций в условиях неопределенности необходимо учитывать не только ожидаемую доходность, но и риск финансовых активов, причем притязания инвесторов относительно доходности и риска должны быть сбалансированы.

2. Не следует вкладывать весь капитал в один актив. Вкладывая весь свой капитал лишь в один актив, инвестор обрекает себя либо на заведомо низкую доходность, либо на заведомо высокий риск.

Распределение инвестируемого капитала среди различных ценных бумаг приводит к формированию портфеля ценных бумаг инвестора. Совокупность ценных бумаг, которыми владеет инвестор, называют портфелем ценных бумаг. За счет использования «эффектов портфеля» инвестор может достичь приемлемых для себя значений ожидаемой доходности и риска вложений.

Параметры и характеристики доходности и риска портфеля.

Доходность и риск портфеля характеризуется тремя величинами

$$m,x,\sigma.$$

Буква x характеризует долю инвестиционных вложений от общего числа инвестиций. Буква m характеризуют доходность акции, буква σ характеризует риск вложений.

В формулах доходности и риска используются следующие обозначения:

R_i – случайная величина доходности ценных бумаг i-го вида; R_p – случайная величина доходность портфеля; m_p – ожидаемая дохдность портфеля; D_p – дисперсия случайной величины R_p; V_{ij} – ковариация случайных величинR_i и R_j;

Основными числовыми характеристиками являются:

$$m_p = M[R_p] = \sum_{i=1}^{n} x_i M[R_i] = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \text{ - ожидаемая доходность портфеля.}$$

$$\sqrt{V_{ii}} = \sqrt{M[(R_i - m_i)^2]} = \sigma_i \text{ - риск портфеля.}$$

Второй раздел посвящен принципам формирования оптимального портфеля безрисковых ценных бумаг и математической формализации задачи динамического программирования.

Математическая формализация задачи динамического программирования

Требуется ввести следующие характеристики:

s – состояние процесса;

S_i – множество возможных состояний процесса перед i-м шагом:

W_i – выигрыш с i-го шага до конца процесса, $i = \overline{1, m}$.

Выделяются семь основных этапов :

1. Разбиение задачи на шаги (этапы). Шаг не должен быть слишком мелким и слишком большим .

2. Выбор переменных, характеризующих состояние s монтируемого процесса перед каждым шагом, и выявление налагаемых на них ограничений.

3. Определение множества шаговых управлений x_i, $i = \overline{1,m}$, и налагаемых на них ограничений, т.е. области допустимых управлений .

4. Определение выигрыша

$$\phi_i(s, x_i),$$

который принесет на i-м шаге управление x_i, если система перед этим находилась в состоянии s.

5. Определение состояния s', в которое переходит система из состояния s под влиянием управления x_i,

$$s' = f_i(s, x_i),$$

где f_i – функция перехода из состояния s в состояние s'.

6. Составление уравнения, определяющего условный оптимальный выигрыш на последнем шаге, для состояния s моделируемого процесса

$$W_m(s) = \max_{x_m \in X} \phi_m(s, x_m).$$

7. Составление основного функционального уравнения динамического программирования, определяющего условный оптимальный выигрыш для данного состояния s с i-го шага и до конца процесса через уже известный условный оптимальный выигрыш с $(i+1)$-го шага и до конца процесса

$$W_i(s) = \max_{x_i \in X} \{\phi_i(s, x_i) + W_{i+1}(f_i(s, x_i))\}.$$

Вместо состояния s подставлено новое состояние $s' = f_i(s, _i)$, в которое система переходит на i-м шаге под влиянием управления x_i.

В третьем разделе используется математическая модель для решения задачи динамического программирования и получения оптимального безрискового инвестиционного портфеля.

Модель строится следующим образом:

1. Определение числа шагов. Число шагов m равно числу инвестиционных проектов, в которые осуществляется инвестирование.

2. Определение состояния системы. Состояние системы на каждом шаге характеризуется количеством средств s , имеющихся в наличии перед данным шагом, $s \leq D$.

3. Выбор шаговых управлений. Управлением на 1-м шаге x_i, $i = \overline{1, m}$, является количество средств, инвестируемых в i-е предприятие.

4. Функция выигрыша на i-м шаге

$$\phi_i(x_i).$$

Это прибыль, которую приносит i-е предприятие при инвестировании в него средств x_i. При этом общий выигрыш есть

$$W = \sum_{i=1}^{m} \phi_i(x_i).$$

5. Определение функции перехода в новое состояние

$$f_i(s, x) = s - x.$$

Таким образом, если на i-м шаге система находилась в состоянии s, а выбрано управление x, то на $(i + 1)$-м шаге система будет находиться в состоянии $s - x$. Другими словами, если в наличии имеются средства в размере s и в i-е предприятие инвестируется сумма в размере x, то для дальнейшего инвестирования остаётся $s - x$ условных единиц .

6. Составление функционального уравнения для $i = m$.

$$W_m(s) = \phi_m(s),$$

$$x_m(s) = s.$$

На последнем шаге, т. е. перед инвестированием средств в последнее предприятие, условное оптимальное управление соответствует количеству средств, имеющихся в наличии. Таким образом, сколько средств осталось, столько и надо вложить в последнее предприятие.

7. Составление основного функционального уравнения.

$$W_i(s) = \max_{x \le s}\{\phi_i(x) + W_{i+1}(s-x)\}.$$

Сделаем пояснение. Пусть перед i-м шагом у инвестора остались средства в размере s условных единиц. Тогда условных единиц он может вложить в i-е предприятие, при этом оно принесёт доход $\phi_i(x)$, а оставшиеся $s-$ условных единиц – в остатьные предприятия с $(i+1)$—го до m-го. Условный оптимальный выигрыш от такого вложения $W_{i+1}(s-x)$. Оптимальным будет то условное управление x, при котором сумма $\phi_i(x)$ и $W_{i+1}(s-x)$ максимальна.

На основе этой модели решаются задачи оптимизации инветироания.

Пусть выделены средства $D = 5000$ у.е. Инвестировать их можно в $m = 3$ предприятия, а значения $\phi_i(x)$ заданы в таблице 1.

Таблица 1 - Доходнось предприятий

x, тыс. усл. ед.	$\phi_1(x)$, тыс. усл. ед.	$\phi_2(x)$, тыс. усл. ед.	$\phi_3(x)$, тыс. усл. ед.
1	1.5	2	1.7
2	2	2.1	2.4
3	2.5	2.3	2.7
4	3	3.5	3.2
5	3.6	4	3.5

Для простоты вкладываются только целые тысячи условных единиц. Проводится условная оптимизация. По её результатам заполняется таблица 2.

Таблица 2 - Прибыльность предприятий в состоянии s

s	$i=3$		$i=2$		$i=1$	
	$x_3(s)$	$W_3(s)$	$x_2(s)$	$W_2(s)$	$x_1(s)$	$W_1(s)$
1	1	1.7	1	2		
2	2	2.4	1	3.7		
3	3	2.7	1	4.4		
4	4	3.2	1	4.7		
5	5	3.5	4	5.2	2	6.4

В первой колонке записываются возможные состояния системы $s = \overline{1,5}$, в верхней строке – номера шагов $i = \overline{1,3}$. На каждом шаге определяются условные оптимальные управления $x_i(s)$ и условные оптимальные выигрыши $W_i(s)$, $i = \overline{1,3}$, $s = \overline{1,5}$.

а) Проведение условной оптимизации для последнего шага $i = 3$.

Функциональное уравнение на последнем шаге имеет вид

$$W_3(s) = \phi_3(s), \qquad x_3(s) = s,$$

поэтому два столбца таблицы 2 соответствующие $i = 3$, заполняются автоматически по таблице 1.

б) Условная оптимизация для $i = 2$. Функциональное уравнение имеет вид

$$W_2(s) = \max_{x \le s}\{\phi_2(x) + W_3(s - x)\}.$$

Для проведения условной оптимизации заполним ряд вспомогательных решений, соответствующих различным значениям s.

1) $s = 1$

$\max\{1.7; 2\} = 2.$

Следовательно, $W_2(1) = 2, x_2(1) = 1.$

2) $s = 2$

$\max\{2.3; 3.7; 2.1\} = 3.7.$

Следовательно, $W_2(2) = 3.7, x_2(2) = 1.$

3) $s = 3$

$\max\{2.7; 4.4; 3.8; 2.3\} = 4.4.$

Следовательно, $W_2(3) = 4.4, x_2(3) = 1.$

4) $s = 4$

$\max\{3.2; 4.7; 4; 3.5\} = 4.7.$

Следовательно, $W_2(4) = 4.7, x_2(4) = 1.$

5) $s = 5$

$\max\{5.2; 4.7; 4.4; 3.7; 2; 0\} = 6.4.$

Следовательно, $W_2(5) = 5.2$, $x_2(5) = 1$ или $x_2(5) = 4$.

в) Условная оптимизация для $i = 1$. Перед первым шагом состояние системы известно (S = D = 5000 у.е.), и условную оптимизацию следует проводить только для этого значения.

Таблица 3 - Прибыльность предприятий, при s = 5

x,	$5 - x$,	$\phi_1(x)$	$W_2(5-x)$	$\phi_1(x) + W_2(5-x)$
0	5	0	5.2	5.2
1	4	1.5	4.7	6.2
2	3	2	4.4	6.4
3	2	2.5	3.7	6.2
4	1	3	2	5
5	0	3.6	0	3.6

Следовательно, исходя из таблицы 3 $W_1(5) = 6.4$ и $x_1(5) = 2$. Есть оптимальная прибыль, приносимая тремя предприятиями при инвестировании в них 5000 у. е. равна 6400 у. е.

$$W^* = W_1(5) = 6.4.$$

Проведем безусловную оптимизацию.

$i = 1, s_1 = 5, W_1(5) = 6.4, x_1^* = x_1(5) = 2.$

Для $i = 2$ по формуле (2):

$s_2 = s_1 - x_1^* = 5 - 2 = 3; W_2(3) = 4.4, x_2^* = x_2(3) = 1.$

Для $i = 3$ получаем:

$s_3 = s_2 - x_2^* = 3 - 1 = 2; W_3(2) = 2.4, x_3^* = x_3(2) = 2.$

Таким образом, оптимальное управление есть $x^* = (2, 1, 2)$, т.е. в первое и третье предприятие надо вложить по 2000 у. е., а во второе – 1000 у. е. для получения максимальной прибыли 6400 у. е.

Четвертый раздел посвящен принципам построения оптимального портфеля рисковых ценных бумаг и математической формализации задачи динамического программирования.

При выборе портфеля используется портфельная теория Марковица. В модели Марковица допустимыми являются только стандартные портфели, портфели без коротких позиций(без продаж), то есть портфель состоящий только из купленных акций. Отсюда налагаются на портфель некоторые ограничения:

– положительные доли всех ценных бумаг (x_i).

– сумма всех долей ценных бумаг должна составлять 1, это правило нормировки долей.

Так же доходность портфеля будет выглядеть как сумма доходностей отдельных акций с выбранными весовыми коэффициентами. Так как каждый инвестор пытается максимизировать получаемую доходность, то необходимо будет максимизировать эту целевую функцию. В итоге это будет выглядеть в виде формулы .

Помимо доходности инвестору необходимо так же учесть и риск, связанный с той или иной акцией. Риск по Г. Марковицу выражается в виде среднеквадратического отклонения σ_i каждой акции. Значение σ_p - это уровень приемлемого риска для инвестора.

Экономико-математическая модель задачи формирования оптимального портфеля акций максимальной эффективности при которой риск портфеля не превышает заданного значения σ_p , и при учете всех ограничений на портфель, примет следующий вид :

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i d_i \to \max, \\ \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j} \le \sigma_p, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

Обратная задача оптимизации портфеля сводится к выбору такой структуры портфеля, доходность которого выше либо равна заданному значению m_p, а риск минимален. Экономико-математическая модель задачи в этом случае примет вид:

$$\begin{cases} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j} \to \min, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i d_i \ge d_p, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

В пятом разделе построенна математическая модель для решения задачи динамического программирования и получения оптимального рискового инвестиционного портфеля.

Рассмотрим пример формирования инвестиционного портфеля по модели Г. Марковица .Портфель будет состоять из четырех независимых акций (P_{ij}): ОАО «Газпром», ОАО «Норильский никель», ОАО «Мечел» и ОАО «Сбербанк». В данной задаче требуется построить инвестиционный портфель с минимально возможным риском, при условии, что доходность будет не меньше 7% ($d_p = 0.07$).

В таблице 4 показана стоимость акций и их доходность с 01.02.2014 по 01.02.2015г.

Таблица 4 – Стоимость и доходность акций компаний

j	Газпром		НорНикель		Мечел		Сбербанк	
	P_1	d_1 в %	P_2	d_2 в%	P_3	d_3 в %	P_4	d_4 в %
1	139.2		5980		39.9		91.16	
2	135.5	-3	5865	-2	38.4	-4	83.8	-8
3	128.77	-5	6405	9	37.5	-2	72.5	-13
4	141.7	10	6656	4	47.5	27	84.5	17
5	148.96	5	6719	1	52.4	10	84.5	0
6	132	-11	7060	5	38.5	-27	73.6	-13
7	131.95	0	7230	2	32.9	-15	73.21	-1
8	137.9	5	7320	1	24.6	-25	75.52	3
9	141.5	3	8033	10	21.59	-12	76.23	1
10	142.86	1	8820	10	22.6	5	72.25	-5
11	130.31	-9	8080	-8	24.71	9	54.9	-24
12	143.82	10	11610	44	44.85	82	61.5	12
13	152.95	6	11182	-4	82.27	83	75.91	23

1. Рассчитывается ожидаемые доходность(d_j) и риск (σ_j) акций каждой компании по формулам

$$d_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} d_{ij}}{n},$$

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (d_{ij} - d_j)^2}{n}}.$$

Ожидаемая доходность и риск акций представлены в таблице 5.

Таблица 5 – Ожидаемая доходность и риск акций компаний

p	σ в %	d в %
1	1.01	6.64
2	6	12.55
3	10.94	35.14
4	-0.68	

2. Рассчитываются общие доходность d_p и риск σ_p акции каждой компании по формулам

$$\sum_{i=1}^{n} x_i d_i = d_p,$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j} = \sigma_p.$$

3. Так как исходя из ограничений все доли в сумме равны 1 и являются неотрицательными, то итоговая задача будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i d_i \leq d_p, \\ \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{j=i+1}^{n} x_i x_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j} = \sigma_p, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

Решив данную задачу в результате мы получаем следующий расчет общего риска и доходности портфеля. Общий риск портфеля составил 0,64%, тогда как общая доходность 7%. Доля акций Газпрома равна 14%, доля НорНикель 51%, доля Мечела 35%.

В заключение описаны результаты проделанной работы.

1. Определены основные понятия, связанные с задачей динамического прогрммирования. Изучены различные модели нахождения опимального портфеля.

2. Изучены принципы и алгоритмы формирования инветиционного портфеля.

3. Построена математическая модель изученной задачи формирования оптимального портфеля. Разработана программа,позволяющая вычислять основные характеристики и определять оптимальный инветиционный портфель. Программный код и результаты работы программы приводятся в приложениях. Рассмотрен ход решения задач с рисковыми и безрисковыми ценными бумагами.

4. Вычислены основные характеристики доходности и риска инвестиционного порфеля и на основе модели Марковица и теоретических формул на основе одних и тех же параметров.

Данная работа демонстрировала практическое применение вычисления оптимального портфеля инвестиций.