

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ПОРТФЕЛЯ МАРКОВИЦА

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы

направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Тодоровой Кристины Дмитриевны

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н.

О. А. Мыльцина

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

С. П. Сидоров

Саратов 2020

ВВЕДЕНИЕ

Эффективное построение и стратегия управления инвестиционным портфелем в современной теории инвестиций являются одной из важнейших проблем. Комбинация инвестиционных инструментов, служащих для достижения поставленных целей, составляют инвестиционный портфель. Все большее число инвесторов рассматривает и использует возможности портфельного инвестирования. Это связано с тем, что данный способ инвестирования является наиболее безопасным, однако не менее затратным как по времени, необходимому для анализа рынка, так и материально. Большинство инвесторов применяют одну из нескольких моделей формирования портфеля, требующую качественных расчетов и позволяющую достигать целей инвестирования, как по уровню доходности, так и по уровню риска.

Актуальность данной темы обеспечивается тем, что состояние финансового рынка подвержено частым изменениям, к которым необходимо быстро приспосабливаться и возрастает потребность использования не только научных, но и практически обоснованных стратегий управления портфелем ценных бумаг.

Целью бакалаврской работы является изучение и анализ портфельной теории Г. Марковица для формирования оптимального и эффективного инвестиционного портфеля. А также расчёт и выбор оптимального портфеля по Г. Марковицу на примере семи российских компаний и тридцати одной крупнейшей американской компании, которые входят в состав рыночного индекса DJIA.

Объект исследования портфели Марковица.

Предмет исследования набор ценных бумаг для составления портфеля Марковица.

Под портфельной теорией в наиболее общем смысле мы понимаем совокупность принципиальных подходов к формированию инвестиционного портфеля, в частности портфеля ценных бумаг, а также экономико-математических моделей, позволяющих формализовать процесс определения состава и структуры инвестиционного портфеля, в максимальной степени соответствующего требованиям конкретного инвестора.

Основной сферой применения портфельной теории является аналитическое обоснование инвестиционных решений, принимаемых в условиях, когда портфельному менеджеру целесообразно (либо необходимо в силу закона или договора) осуществить вложения одновременно в несколько различных инвестиционных активов.

Практическая значимость. Главной задачей, которая может быть решена с использованием портфельной теории, выступает определение оптимального, с точки зрения конкретного инвестора, сочетания доступных ему инвестиционных активов с учетом собственных характеристик этих активов, текущей и перспективной ситуации на рынках соответствующих активов, личных предпочтений и финансовых возможностей инвестора. В работе разобраны методы построения оптимальных и эффективных портфелей Марковица. В программе Excel и на языке программирования R построены портфели ценных бумаг различных компаний. На языке R проведен тестовый пример реализации портфельной теории на данных большого объема.

Структура и содержание бакалаврской работы. Бакалаврская работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 26 наименования, двух приложений. Общий объем работы составляет 52 страниц, включая приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении кратко изложена проблема исследования бакалаврской работы, приведены цели работы.

В первом разделе изучены способы выбора инвестиционной стратегии и формирование портфеля. Инвестиции в ценные бумаги в условиях неопределенности связаны с риском того, что фактическая доходность может отличаться от ожидаемой доходности. Это даёт основание рассматривать доходность R ценной бумаги, соответствующую некоторому периоду владения, как случайную величину, а выбор инвестиционной стратегии производить на основе анализа её числовых характеристик: математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения. Математическое ожидание $m = M[R]$ доходности актива соответствует ожидаемой доходности, а дис-

персия $\sigma^2 = D[R]$ или среднеквадратичное отклонение σ доходности могут использоваться как меры риска вложений в данный актив.

Идеальной для инвестора стратегией инвестирования в рамках данного подхода была бы стратегия, обеспечивающая достижение максимальной ожидаемой доходности при минимальном риске вложений. Но одновременное достижение этих целей невозможно. Практика работы на финансовых рынках показывает, что большему значению ожидаемой доходности обычно соответствует и большее значение риска вложений.

Инвестируя в активы с более высоким риском, инвесторы, как правило, рассчитывают на достижение более высокой доходности в виде премии за риск.

Из существования двух противоположных целей инвестирования можно сделать следующие выводы.

1. При осуществлении финансовых инвестиций в условиях неопределённости необходимо учитывать не только ожидаемую доходность, но и риск финансовых активов, причём требования инвесторов относительно доходности и риска должны быть сбалансированы.

2. Не следует вкладывать весь капитал в один актив. Вкладывая весь свой капитал только в один актив, инвестор обрекает себя либо на заведомо низкую доходность, либо на заведомо высокий риск.

Следствием второго вывода является необходимость распределения (диверсификации) капитала между разными активами.

Распределение инвестируемого капитала среди различных ценных бумаг приводит к формированию портфеля ценных бумаг инвестора. За счёт использования «эффектов портфеля» инвестор может достичь приемлимых для себя значений ожидаемой доходности и риска вложений. В этом состоит главное преимущество портфельного инвестирования по сравнению с инвестициями в отдельные ценные бумаги.

Выбор портфеля ценных бумаг на основе учёта его ожидаемой доходности и риска известен как подход «доходность - риск», который впервые был сформулирован Г.Марковицем. Дальнейшее развитие подход получил благодаря работам Дж. Тобина, У. Шарпа, С. Росса и др.

Рассмотрим математическую постановку задачи формирования инвестиционного портфеля ценных бумаг. Предположим, что инвестор может вложить свой капитал в покупку n видов ценных бумаг, сформировав тем самым портфель ценных бумаг. Пусть x_i - доля общего вложения, приходящаяся на i -вид ценных бумаг, $i = \overline{1, n}$. Таким образом,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1. \quad (1)$$

Вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ определяет структуру портфеля ценных бумаг. Значения x_i интерпретируются следующим образом:

а) $x_i > 0$ означает, что доля x_i капитала инвестора вложена в ценные бумаги i -го вида;

б) $x_i = 0$ означает, что ценные бумаги i -го вида отсутствуют в портфеле;

в) $x_i < 0$ означает, что относительно ценных бумаг i -го вида совершена операция короткая продажа. Операция «короткая продажа» состоит в продаже ценных бумаг, взятых в долг. Средства, полученные за счёт данной операции, составляют долю $|x_i|$ от первоначального капитала инвестора и использованы им для покупки других ценных бумаг.

Пусть R_i - случайная величина доходности ценных бумаг i -го вида, как если бы весь капитал инвестора был бы целиком вложен в их покупку, $i = \overline{1, n}$. Тогда случайная величина R_p доходности портфеля со структурой, задаваемой вектром $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, есть очевидно

$$R_p = \sum_{i=1}^n R_i x_i.$$

Следовательно, ожидаемая доходность такого портфеля имеет вид

$$m_p = M[R_p] = \sum_{i=1}^n x_i M[R_i] = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad (2)$$

где $m_i = M[R_i]$ - ожидаемая доходность ценных бумаг i -го вида, если бы в них вложили весь капитал.

Отклонение случайной величины доходности портфеля от ожидаемой доходности есть случайная величина

$$R_p - m_p = \sum_{i=1}^n x_i (R_i - m_i).$$

Выразим математическое ожидание квадрата этого отклонения, то есть дисперсию случайной величины R_p

$$D_p = M[(R_p - m_p)^2] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij} x_i x_j, \quad (3)$$

где величины $V_{ij} = M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)]$ являются ковариациями случайных величин R_i и R_j . Видно, что значения

$$V_{ii} = M[(R_i - m_i)^2] = \sigma_i^2$$

являются дисперсиями случайных величин R_i , а σ_i — соответствующие среднеквадратичные отклонения — риск i -х ценных бумаг.

Во втором разделе изучается задача отыскания оптимального портфеля рискованных ценных бумаг. Большое значение для развития мирового финансового рынка в конце XX столетия имело распространение теории диверсификации вложений, согласно которой инвестор может эффективно управлять рисками путём распределения инвестиций по более широкому спектру активов. Х. Леви и М. Сарнат доказали, что благодаря международной диверсификации можно добиться значительных выгод, поскольку включение в портфель акций развивающихся рынков значительно улучшает позицию инвестора по кривой «доходность-риск».

Опыт и математические расчёты показали, что максимальное сокращение риска достижимо, если в портфель отобрано от 10 до 15 различных финансовых активов. Дальнейшее увеличение состава портфеля нецелесообразно, так как возникает эффект излишней диверсификации.

Формирование оптимального инвестиционного портфеля реализуется в виде последовательности следующих действий:

1. Выбор целей и методов управления портфелем;

Основными целями могут быть, в частности, безопасность вложений, их доходность, рост капитала. Под безопасностью понимается «неуязвимость капитала от потрясений на рынке и стабильность получения дохода». Приоритет тех или иных целей определяет тип портфеля.

2. Анализ рынка в целом, а также характеристик ценных бумаг, доступных инвестору;

Одним из наиболее дорогостоящих, трудоемких элементов управления, является мониторинг, представляющий собой непрерывный детальный анализ фондового рынка, тенденций его развития, секторов фондового рынка, инвестиционных качеств ценных бумаг. Конечной целью мониторинга является выбор ценных бумаг, обладающих инвестиционными свойствами, соответствующими данному типу портфеля.

3. Выбор методик измерения рисков и оценки рисков;

Оценка риска - это совокупность аналитических мероприятий, позволяющих спрогнозировать возможность получения дополнительного предпринимательского дохода или определенной величины ущерба от возникшей рискованной ситуации и несвоевременного принятия мер по предотвращению риска. В основе оценки финансовых рисков лежит нахождение зависимости между определенными размерами потерь и вероятностью их возникновения.

4. Формирование оптимального портфеля в соответствии с принятыми целями;

Этот этап включает отбор конкретных активов для вложения средств, а также оптимального распределения инвестируемого капитала между ними в соответствующих пропорциях.

5. Управление портфелем, то есть его реструктуризация в случае, если характеристики портфеля не отвечают поставленным целям;

Процесс управления портфелем ценных бумаг связан с периодической оценкой эффективности портфеля с точки зрения фактически получен-

ного дохода и риска, которому подвергался инвестор, и сопоставления полученных результатов с целями инвестора.

6. Оценка эффективности портфеля и пересомтр принятой стратегии.

Существуют такие подходы к оценке как: исчисление специальных показателей (например, коэффициент Шарпа, коэффициент Трейнора и др.), расчет и последующее сопоставление эталонных характеристик с условными параметрами «рыночного портфеля», статистические методы (например, построение перцентильных рангов, корреляционный анализ и т. д.), факторный анализ, методы искусственного интеллекта и др.

По Г. Марковицу, задача оптимизации портфеля — минимизация риска при заданной средней доходности. Дж.Тобин показал, что рыночный портфель, то есть совокупность всех имеющихся в данный момент у инвесторов ценных бумаг, является эффективным. Более того, любая комбинация рыночного портфеля с безрисковым активом даёт снова эффективный портфель, имеющий меньший риск, хотя и с меньшим ожидаемым доходом.

В третьем разделе рассматривается язык программирования *R* для работы с большими данными. *R* — язык программирования для статистической обработки данных и работы с графикой, а также свободная программная среда вычислений с открытым исходным кодом в рамках проекта GNU(свободная Unix-подобная операционная система). *R* широко используется как статистическое программное обеспечение для анализа данных и фактически стал стандартом для статистических программ.

Big Data (большие данные) — серия подходов, инструментов и методов обработки структурированных и неструктурированных данных огромных объёмов и значительного многообразия для получения воспринимаемых человеком результатов, эффективных в условиях непрерывного прироста, распределения по многочисленным узлам вычислительной сети.

Таким образом, под Big Data понимается не какой-то конкретный объём данных и не сами данные, а методы их обработки, которые позволяют распределённо обрабатывать информацию. Эти методы можно применить как к огромным массивам данных, так и к маленьким.

В четвёртом разделе проводится построение и анализ портфелей Марковица, построенных с помощью программы Excel и языка программирова-

ния R на примере семи российских и тридцати одной американской компании, соответственно. Проведём формирование инвестиционного портфеля по модели Г. Марковица с помощью программы Excel.

Портфель будет состоять из семи акций российских компаний. Акции взяты из нефтегазового сектора. Период рассмотрения динамики изменения стоимости акций взят за 3 месяца ежедневно с 10.01.2019 – 10.03.2019г.

На следующем этапе формирования портфеля необходимо рассчитать ежедневные доходности по каждой акции. Далее определяем математическое ожидание доходностей по каждой акции, для этого найдем среднеарифметическое значение за весь период. Оценка риска каждой акции – это ее изменчивость (волатильность) по отношению к математическому ожиданию доходностей. Результаты приведены в приложении А.

Для оценки уровня риска всего инвестиционного портфеля воспользуемся надстройкой в Excel. Результатом будет таблица ковариаций доходностей акций между собой.

Для расчета общего риска портфеля необходимо перемножить доли весов акций между собой и значения ковариаций этих акций.

Для формирования инвестиционного портфеля минимального риска необходимо определить минимальный уровень допустимой доходности портфеля. Возьмем уровень $\geq 0,09\%$. При оценке долей акций воспользуемся надстройкой в Excel, а также введем ограничения на весовые значения коэффициентов у акций: сумма долей акций должна быть равна 1 и сами доли должны иметь положительный знак.

В результате мы получаем следующий расчет общего риска и доходности портфеля. Общий риск портфеля составил 1,00%, тогда как общая доходность 0,09%. Доли акций Лукойла получились равными 0,39%, доли Роснефть 0,61%. Портфель формируется из двух акций ПАО «Лукойл» и ПАО «Роснефть».

Теперь проведём формирование инвестиционного портфеля, состоящего из акций только с положительными доходностями. Доходность акций ПАО «Газпром нефть» и ПАО «Роснефть» имеют отрицательное ожидание доходности, поэтому их следует исключить из портфеля. Аналогично проделаем все этапы формирования портфеля.

Вторая задача формирования эффективного инвестиционного портфеля решается на основе модели Г. Марковица – построение портфеля с максимальным уровнем доходности и ограниченным уровнем риска. Разберем на примере данную задачу. Установим максимально допустимый уровень риска портфеля $\leq 0,007\%$. С помощью надстройки «Поиск решений», определим доли акций в данной интерпретации задачи.

В результате мы получили доли акций в инвестиционном портфеле: 70,98% акций ПАО «Лукойл», 16,14% акций ПАО «Башнефть», 8,85% акций ПАО «Татнефть», 4,03% акций ПАО «Саратовский НПЗ». Общий риск портфеля не превысил 0,007%, а доходность составила 0,002%.

Наглядно видно, что в случае портфеля, взятого с отрицательными доходностями преобладает доля акций ПАО «Башнефть», а в случае портфеля, взятого с положительными доходностями преобладает доля акций ПАО «Лукойл».

Проведем формирование инвестиционного портфеля по модели Г. Марковица с помощью языка программирования *R*.

Для расчёта нашего портфеля будем использовать акции тридцати одной американской компании, входящих в состав индекса DJIA.

Акции взяты из различных секторов. Период рассмотрения динамики изменения стоимости акций взят за 12 лет ежедневно, за исключением выходных дней с 03.01.2006 – 29.12.2017 г.

В качестве среды для разработки будем использовать *Kernels* (ядра)- это онлайн-среда для программирования, которая работает на серверах *Kaggle*.

Для анализа данных необходимо их привести к аккуратному виду. «Опрятные» данные - это данные, с которыми легко работать: их легко преобразовать, визуализировать и использовать для построения модели.

Чтобы было удобнее работать, ограничим нашу выборку, исключая столбцы с ненужными данными. Итого остаются 3 столбца: *Date*, *Close*, *Name*.

Применим функцию *spread()*, которая принимает два столбца (пара ключ - значение) и разносит их по разным столбцам, превращая длинную таблицу в широкую. Эта функция используется в случаях, когда переменные образуют строки вместо столбцов.

Далее исключаем строки, в которых есть отсутствующие значения, т.к. это может несколько усложнить вычисления. Проверка на отсутствующие значения осуществляется с помощью функции *complete.cases()*. В результате из 3020 максимальных строк остаётся 3018 строк.

Итак, процесс приведения данных к аккуратному виду завершен, это позволяет осуществлять дальнейшие процедуры по анализу.

На следующем этапе будем производить формирование портфеля. Сначала необходимо рассчитать ежедневные доходности по каждой акции. Для этого прологорифмируем отношение цены акции следующего дня к цене предыдущего дня.

Далее определяем математическое ожидание доходностей по каждой акции, т.е. вычисляем ожидаемую доходность. Для этого найдем среднеарифметическое значение за весь период с помощью функции *colMeans()*, которая вычисляет средние значения по столбцам матриц. Акции компаний, имеющие отрицательное ожидание доходности, исключаются из портфеля. В нашем случае исключаются акции компании General Electric (NYSE: GE).

Следующим шагом будем оценивать риск каждой акции – это ее изменчивость (волатильность) по отношению к математическому ожиданию доходностей. Воспользуемся функцией *sd()*, рассчитывающей стандартное отклонение выборки.

Мы получили первоначальные необходимые данные для оценки долей данных акций в инвестиционном портфеле. Для оценки уровня риска всего инвестиционного портфеля построим ковариационную матрицу с помощью функции *cov()*. Результатом будет таблица ковариаций доходностей акций между собой.

Все выше выполненные действия, осуществляются автоматически с помощью пакета *portfolio.optimization*.

В результате мы получили оптимальный инвестиционный портфель, в состав которого входят акции семи компаний, соответствующие следующим тикерам: IBM, JNJ, KO, MCD, PG, VZ, WMT. Доли акций компании имеют следующий вид: 32,39% акции JNJ, 16,42% акции MCD, 15,26% акции PG, 15,03% акции KO, 14,33% акции WMT, 5,43% акции IBM, 1,1% акции VZ.

В заключении приведены итоги работы, сделаны выводы по исследованию. В результате формирования инвестиционного портфеля минимального риска получен портфель, сформированный из акций двух компаний: ПАО «Лукойл» и ПАО «Роснефть».

При построении портфеля с максимальным уровнем доходности и ограниченным уровнем риска получили портфель, состоящий из акций четырёх компаний: ПАО «Лукойл», ПАО «Башнефть», ПАО «Татнефть», ПАО «Саратовский НПЗ».

В случае портфеля, взятого с отрицательными доходностями преобладает доля акций ПАО «Башнефть», а в случае портфеля, взятого с положительными доходностями преобладает доля акций ПАО «Лукойл».

В результате формирования оптимального инвестиционного портфеля получен портфель, состоящий из акций семи компаний, соответствующие следующим тикерам: IBM, JNJ, KO, MCD, PG, VZ, WMT. В данном портфеле преобладает доля акций JNJ, а минимальная доля акций принадлежит VZ.

В приложении А приведены результаты формирования оптимального инвестиционного портфеля в программе Excel.

В приложении Б приведены результаты формирования оптимального инвестиционного портфеля на языке *R*.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В теоретической части бакалаврской работы приведены некоторые числовые характеристики, с помощью которых вычисляется ожидаемая доходность актива, риск вложений и т.д. Рассмотрены разновидности ценных бумаг и формирование портфеля, а также задача Марковица.

В приложении А по полученным в первом и втором разделах формулам сформирован оптимальный инвестиционный портфель ценных бумаг. Оптимальный портфель был получен с помощью Excel. На примере семи российских компаний были рассчитаны оптимальные портфели.

В приложении Б сформирован оптимальный инвестиционный портфель ценных бумаг по акциям тридцати одной американской компании. Данный оптимальный портфель был получен с помощью языка *R*, описание которого сформулировано в третьем разделе.