

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

**АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ КРАТКОСРОЧНОГО И  
ДОЛГОСРОЧНОГО СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 4 курса 412 группы

направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Халили Романа Алексеевича

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н.

\_\_\_\_\_

В. Р. Шебалдин

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_

С. П. Сидоров

Саратов 2020

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** В 21 веке понятие страхование жизни приобрело высокий спрос. Первоначальной причиной тому стал высокотехнологичный рост локального сообщества, в связи с чем возросли и риски. Обеспечить себе безопасность одна из важнейших потребностей человека и именно через страхование жизни он реализует ее.

У любого молодого и здорового человека встает вопрос, а стоит ли вообще страховать свою жизнь, ведь смерть пока не входит в планы.

На самом деле жизнь очень непредсказуема и несчастье может наступить в любой момент. Порой даже здоровые люди внезапно умирают, это может быть банальная остановка сердца, инфаркт, тромб и тому подобное.

Малейшая ошибка в организме человека может привести к смерти или инвалидности. Об этом мало кто задумывается, пока этого не происходит.

В первую очередь страхование жизни нужно для того, чтобы оказать мгновенную финансовую помощь. Такая помощь может быть оказана как самому застрахованному человеку, так и его родственникам.

Договора страхования заключаются для того, чтобы избавиться от финансовых потерь, связанных с неопределённостью наступления тех или иных случайных событий. До заключения договора страхования клиент имел некоторый риск, который мог привести к случайным потерям  $X$  (а мог и не привести к ним). После заключения договора страхования, заплатив некоторую неслучайную сумму  $p$  клиент избавился от этого риска. Иными словами, клиент идет на небольшие детерминированные расходы с тем, чтобы избавиться от случайных потерь, которые хоть и маловероятны, но могут быть катастрофически большими для него. Однако, сам риск не исчез - его приняла на себя страховая компания. Поэтому финансовый риск и связанная с ним опасность разорения объективно присутствуют в деятельности любой страховой компании.

**Целью бакалаврской работы** является анализ моделей краткосрочного и долгосрочного страхования жизни.

**Объект исследования** модели краткосрочного и долгосрочного страхования жизни.

**Предмет исследования** оценка актуарной стоимости обязательств страховщика.

Для достижения поставленной цели в работе необходимо решить следующие задачи:

- определить основные понятия, связанные с моделями страхования;
- рассмотреть модели краткосрочного и долгосрочного страхования жизни;
- рассчитать разовые нетто-премии для моделей краткосрочного и долгосрочного страхования жизни.

**Практическая значимость** проводимого исследования состоит в том, что с финансовой точки зрения договор страхования представляет собой ряд взаимных платежей, которые могут осуществиться с определенной вероятностью. Обязательства каждой из сторон складываются из всех платежей, которые она должна осуществить. По результатам вычислений размера этих платежей можно делать выводы о будущих финансовых тратах и вероятности разорения компании.

**Структура и содержание бакалаврской работы.** Работа состоит из введения, шести разделов, заключения, списка использованных источников, состоящего из 20 наименований, и двух приложений. Общий объем работы составляет 53 страницы, включая приложения.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

**В первом разделе** описаны основные понятия теории страхования. В актуарной математике модели страхования жизни условно делят на две большие группы в зависимости от того, принимается или нет в расчет доход от инвестирования собранных премий. Если нет, то говорится о краткосрочном страховании. Если же да, то говорится о долгосрочном страховании. Простейший вид страхования жизни заключается в следующем. Страхователь платит страховой компании  $p$  руб. (эта сумма называется страховой премией, а компания обязуется выплатить лицу, в пользу которого заключен договор,

страховую сумму  $b$  руб. в случае возникновения страхового случая.

Страховой полис - денежный документ установленного образца, выдаваемый страховщиком страхователю в удостоверение заключенного договора страхования и содержащий его условия.

Брутто-премия - сумма страховых платежей с учетом оперативных расходов по заключению договора страхования, ведению дела, перестрахованию и страхованию.

Активы компании - характеристика состава, размещения и использования общей суммы средств страховой компании.

Страховой случай - фактически произошедшее событие, в связи с негативными или иными оговоренными последствиями которого может быть выплачено страховое возмещение или страховая сумма.

Разорение - сумма задолженности, затребованной к оплате и не погашенной в срок, превысила документированную стоимость движимого или недвижимого имущества.

Процентная ставка - отношение суммы процентов, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды.

Интенсивность процентов - мгновенная относительная скорость накопления средств.

Нетто-премия - сумма страховой премии, которая необходима для обеспечения страховой защиты только от возможного ущерба, без учета той части премии, которая требуется для покрытия прочих расходов.

**Во втором разделе** дано краткое описание моделей долгосрочного страхования жизни. Простейшим примером долгосрочного страхования является пожизненное страхование. При этом виде страхования фиксированная страховая сумма  $b = 1$  выплачивается в момент смерти и поэтому

$$\tau(t) = t, \quad b_t = 1. \quad (1)$$

При  $n$ -летнем чисто накопительном страховании выплата страховой суммы фиксированной величины  $b = 1$  производится в момент  $n$ , если застрахованный дожил до этого момента. В случае смерти до момента  $n$  компания не платит ничего. Этот вид страхования описывается следующими функци-

ями  $\tau(t)$  и  $b_t$ :

$$\tau(t) = n, \quad b_t = \begin{cases} 1, & \text{если } t > n \\ 0, & \text{если } t \leq n. \end{cases} \quad (2)$$

При  $n$ -летнем временном страховании жизни выплата фиксированной страховой суммы  $b = 1$  производится в момент смерти, если застрахованный умер в течение срока действия договора, т.е. на протяжении  $n$  лет с момента заключения договора. Если же застрахованный прожил эти  $n$  лет, то компания не платит ничего. При  $n = \infty$  - пожизненное страхование, этот вид страхования можно описать следующими функциями  $\tau(t)$  и  $b_t$ :

$$\tau(t) = t, \quad b_t = \begin{cases} 1, & \text{если } t \leq n \\ 0, & \text{если } t > n. \end{cases} \quad (3)$$

При  $n$ -летнем смешанном страховании выплата фиксированной страховой суммы  $b = 1$  производится на следующих условиях. Если смерть застрахованного наступит до истечения срока действия договора, то страховая сумма выплачивается в момент смерти. Если же застрахованный дожил до окончания срока действия договора, то страховая сумма выплачивается в момент  $n$  окончания срока действия договора. Нетрудно понять, что этот вид страхования выполняет функции как собственно страхования, так и накопления средств. Его можно описать следующими функциями  $\tau(t)$  и  $b_t$ :

$$\tau(t) = \min(t, n), \quad b_t = 1. \quad (4)$$

При пожизненном страховании, отсроченном на  $m$  лет выплата фиксированной страховой суммы  $b = 1$  производится в момент смерти застрахованного, но только если она произошла по истечении  $m$ -летнего срока с момента заключения договора. Если застрахованный умрет раньше, чем через  $m$  лет после заключения договора, страховое возмещение не выплачивается вовсе. Этот вид страхования описывается следующими функциями  $\tau(t)$  и  $b_t$ :

$$\tau(t) = t, \quad b_t = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq m \\ 1, & \text{если } t > m. \end{cases} \quad (5)$$

**В третьем разделе** представлены формулы для вычисления разовой нетто-премии для основных непрерывных видов страхования.

Везде далее при вычислениях будут использоваться статистические величины из таблицы продолжительности жизни.

Среди которых:

- $q_x$  - доля представителей группы, доживших до возраста  $x$  лет, которые умрут в течение ближайшего года;
- $l_x$  - среднее число живых представителей некоторой группы из 100000 новорожденных к возрасту  $x$  лет;
- $d_x$  - число представителей группы, умерших в возрасте от  $x$  до  $x + 1$  лет;
- $L_x$  - среднее суммарное число лет, прожитых представителями группы в возрасте от  $x$  до  $x + 1$  лет;
- $\tau_x$  - среднее суммарное число лет, прожитых представителями группы в возрасте  $x$  лет и более;
- $e_x^0$  - среднее остаточное время жизни.

Введем обозначения: интенсивность процентов  $\delta = \ln(i + 1)$ , коэффициент дисконтирования  $v = \frac{1}{1+i}$ , где  $i$  - годовая процентная ставка, эффективная учетная ставка  $d = 1 - v$ .

Величина разовой нетто-премии для пожизненного страхования:

$$\bar{A}_x = 1 - \delta \frac{1}{v^x l_x} \int_x^\infty v^t l_t dt. \quad (6)$$

Величина разовой нетто-премии для  $n$ -летнего страхования жизни:

$$\bar{A}_{x:\bar{n}|}^1 = 1 - \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x} - \delta \frac{1}{v^x l_x} \int_x^{x+n} v^t l_t dt. \quad (7)$$

Величина разовой нетто-премии для  $n$ -летнего смешанного страхования:

$$\bar{A}_{x:\bar{n}|} = 1 - \delta \frac{1}{v^x l_x} \int_x^{x+n} v^t l_t dt. \quad (8)$$

Величина разовой нетто-премии для пожизненного страхования, отсроченного на  $m$  лет:

$${}_m|\bar{A}_x = \frac{v^{x+m}l_{x+m}}{v^x l_x} - \delta \frac{1}{v^x l_x} \int_{x+m}^{\infty} v^t l_t dt. \quad (9)$$

**В четвертом разделе** представлены формулы для вычисления разовой нетто-премии для основных дискретных видов страхования.

Пожизненное страхование:

$$A_x = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x}^{\infty} v^{k+1} d_k. \quad (10)$$

$n$ -летнее временное страхование жизни:

$$A_{x:\bar{n}|}^1 = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x}^{x+n-1} v^{k+1} d_k. \quad (11)$$

$n$ -летнее смешанное страхование:

$$A_{x:\bar{n}|} = 1 - \frac{d}{v^x l_x} \sum_{k=x}^{x+n-1} v^k l_k. \quad (12)$$

Пожизненное страхование, отсроченное на  $m$  лет:

$${}_m|A_x = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x+m}^{\infty} v^{k+1} d_k. \quad (13)$$

Пожизненное страхование с ежегодно возрастающей страховой суммой:

$$(IA)_x = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} v^{j+1} d_j. \quad (14)$$

**В пятом разделе** приведены примеры расчета разовой нетто-премии для  $n$ -летнего временного страхования жизни и  $n$ -летнего смешанного страхования жизни.

**Пример.** Используя данные о продолжительности жизни представленные в таблице 1, подсчитать разовую нетто-премию при заключении договора о 5-летнем временном страховании женщины в возрасте  $x = 30$  лет с выплатой страховой суммы в конце года смерти. Эффективная годовая процентная ставка  $i = 7\%$ .

Таблица 1 – Таблица продолжительности жизни

$x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$\tau_x$	${}^0e_x$
30	0.00140	97925	138	97856	4682070	47.81
31	0.00169	97787	165	97705	4584215	46.88
32	0.00180	97622	175	97534	4486510	45.96
33	0.00195	97447	190	97351	4388976	45.04
34	0.00200	97256	194	97159	4291624	44.13

**Решение.** Используя формулу (11) для расчета разовой нетто-премии модели  $n$ -летнего временного страхования жизни получаем:

$$A_{30:\overline{5}|}^1 = \frac{vd_{30} + v^2d_{31} + v^3d_{32} + v^4d_{33} + v^5d_{34}}{l_{30}}.$$

Поскольку  $v = \frac{1}{1+i} \approx 0.93457$ ,  $l_{30} = 97925$ ,  $d_{30} = 138$ ,  $d_{31} = 165$ ,  $d_{32} = 175$ ,  $d_{33} = 190$ ,  $d_{34} = 194$  :

$$A_{30:\overline{5}|}^1 \approx 0.714\% \quad (\text{от величины страховой суммы}).$$

Если страховая сумма равна, например, 1000 руб., то разовая нетто-премия будет равна 7 руб. 14 коп.

**Пример.** Используя данные о продолжительности жизни представленные в таблице 2, подсчитать разовую нетто-премию при заключении договора о 3-летнем смешанном страховании мужчины в возрасте  $x = 25$  лет с выплатой страховой суммы в конце года смерти. Эффективная годовая процентная ставка  $i = 5\%$ .

Таблица 2 – Таблица продолжительности жизни

$x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$\tau_x$	${}^0e_x$
25	0.00291	97072	282	96931	4061435	41.84
26	0.00330	96790	319	96630	3964505	40.96
27	0.00366	96471	353	96294	3867874	40.09

**Решение.** Используя формулу (12) для расчета разовой нетто-премии модели  $n$ -летнего смешанного страхования жизни получаем:

$$A_{25:\overline{3}|} = 1 - d \cdot \frac{l_{25} + vl_{26} + v^2l_{27}}{l_{25}}.$$



Поскольку  $v = \frac{1}{1+i} \approx 0.952381$ ,  $d = 1 - v \approx 0.047619$ ,  $l_{25} = 97072$ ,  $l_{26} = 96790$ ,  $l_{27} = 96471$  :

$$A_{\overline{25}|3} \approx 86.42\% \quad (\text{от величины страховой суммы}).$$

Если страховая сумма равна, например, 1000 руб., то разовая нетто-премия будет равна 864 руб. 20 коп.

**В шестом разделе** дано описание программы для расчета разовых нетто-премий для всех перечисленных выше дискретных видов страхования жизни.

На языке C++ была написана программа, которая считает разовую нетто-премию для каждого из описанных выше дискретных видов страхования.

**Входными данными** программы являются: текстовый файл input.txt в котором расположена таблица продолжительности жизни содержащая статистические свойства времени жизни случайно выбранного человека, относительно которого известен только его возраст, описанные в третьем разделе.

**Входными данными** программы, вводимыми с клавиатуры являются:

- Выбор номера модели страхования для которой будет производиться расчет;
- $x$  - возраст человека на момент заключения договора;
- $n$  - срок действия договора;
- $i$  - процентная ставка;
- $m$  - срок отсрочки (только для пожизненное страхование жизни, отсроченного на  $m$  лет);

Для расчета значений были использованы формулы, представленные в четвертом разделе.

А именно:

- для пожизненного страхования жизни была использована формула (10);
- для  $n$ -летнего временного страхования жизни была использована формула (11);
- для  $n$ -летнего смешанного страхования жизни была использована фор-

мула (12);

- для пожизненного страхования жизни, отсроченного на  $m$  лет была использована формула (13);
- для пожизненного страхования с ежегодно возрастающей страховой суммой была использована формула (14);

**Выходными данными** программы являются:

- Величина разовой нетто-премии для выбранного вида страхования, представленная в процентах от величины страховой суммы;
- Сообщение об ошибке, если пользователем был введен номер модели, не соответствующий ни одному из предложенных интерфейсом программы;

**В заключении** описаны результаты проделанной работы.

В ходе бакалаврской работы было проделано следующее:

- исследована литература по соответствующей тематике;
- определены основные понятия, связанные с моделями страхования;
- рассмотрены модели краткосрочного и долгосрочного страхования жизни;
- приведены примеры по расчету разовой нетто-премии для моделей долгосрочного страхования жизни;
- написана программа на языке C++ для выполнения расчетов разовой нетто-премии для дискретных видов страхования жизни.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Определены основные понятия, связанные с моделями страхования.
2. Рассмотрены модели краткосрочного и долгосрочного страхования жизни.
3. Разработана программа, позволяющая вычислять разовую нетто-премию для основных моделей страхования жизни. Программный код и результаты работы программы приводятся в приложениях.
4. Рассмотрены конкретные примеры по расчету разовой нетто-премии.
5. Программа была протестирована на данных тестовых примерах, и результаты работы продемонстрированы во втором приложении выпускной квалификационной работы.