МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПРИОРИТЕТНЫМИ ДИСЦИПЛИНАМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Прохоровой Ольги Николаевны

Научный руководитель
старший преподаватель ______________ Н. В. Сергеева

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2020

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Данная тема актуальна так как имитационное моделирование является мощным инструментом исследования поведения реальных систем. Построенные имитационные модели СМО могут применяться для расчета экономических характеристик эффективности функционирования реальных систем обслуживания. Методы имитационного моделирования позволяют собрать необходимую информацию о поведении системы с помощью создания ее компьютеризованной модели. Эта информация так же используется далее для проектирования системы.

Целью бакалаврской работы является моделирование и анализ СМО с приоритетными дисциплинами обслуживания с пуассоновским входящим потоком заявок и экспоненциальным законом распределения длительности их обслуживания.

Объектом исследования являются СМО с приоритетом с пуассоновским входящим потоком заявок и экспоненциальным законом распределения длительности их обслуживания.

Предмет исследования – обслуживание заявок поступающих в систему массового обслуживания с приоритетом.

Для достижения поставленной цели в работе необходимо решить следующие задачи:

- изучить основные понятия, связанные с СМО;
- рассмотреть СМО с экспоненциальным законом распределения длительности обслуживания заявок;
- построить модели СМО с приоритетом и без приоритета;
- рассчитать основные характеристики СМО с приоритетом на основе имитационной модели и по теоретическим формулам;
- провести сравнительный анализ систем.

Практическая значимость проводимого исследования состоит в том, что на основании построенной компьютеризированной модели СМО с приоритетом обслуживания можно проводить исследования реально существующих обслуживающих систем (предприятий), рассчитывать характеристики этих систем. По результатам этих вычислений можно делать выводы о состоятельности и эффективности предприятий.

Структура и содержание бакалаврской работы.В первом разделе рассмотрены основные компоненты моделей массового обслуживания и СМО с пуассоновским входящим и выходящим потоками заявок. Во втором разделе описывается необходимая нам система обслуживания типа $M/M/1$. Третий раздел посвящается принципам и особенностям построения имитационных моделей СМО. В четвертом разделе построена математическая модель СМО с приоритетом обслуживания, на основании которой были рассчитаны основные характеристики данной системы. Построена математическая модель СМО без приоритета обслуживания, проведен сравнительный анализ СМО с приоритетами и без, а так же сравнительный анализ практических и теоретических характеристик. Список использованных источников содержит 20 наименований.

Основное содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

В первом разделе рассмотрены основные понятия теории массового обслуживания. Система массового обслуживания (СМО) производит обслуживание требований, поступающих в нее из источника требований и возвращающихся после обслуживания в источник. Обслуживание требований в системе производится обслуживающими приборами. Система может содержать от одного до бесконечного числа приборов.

В системах обслуживания с приоритетами, требования неоднородны как по распределнию длительности обслуживания, так и по занимаемому месту в очереди. Существует два варианта поведения системы в ситуации, когда во время обслуживания требования с некоторым приорететом в систему массового обслуживания поступает требование более высокого приоритета. Система называется системой с *относительным приоритетом*, если поступление такого требования не прерывает обслуживание требования. В противном случае, система называется СМО с *абсолютным приоритетом.*

Случайная последовательность требований, которые поступают в систему обслуживания и которые необходимо обслужить, называется *потоком* требований. Пуассоновские потоки на практике встречаются очень часто, так как к их образованию приводит суммирование случайных потоков с большими интервалами времени между поступлением требований.

Классификация СМО: открытые, замкнутые, с ожиданием, с отказами, с приоритетами, одноканальные и.т.д.

Параметры закона управления процессами в СМО: дисциплина ожидания и дисциплина обслуживания.

Во втором разделе представлены параметры и характеристики СМО. Системы обслуживания характеризуются пятью величинами:

$$A/S/\kappa/B/Z.$$

Буква A характеризует поток требований: $A = M$ (Markov) – пуассоновский поток требований. Буква S характеризует случайные последовательности длительностей обслуживания на отдельных приборах обслуживания: $S = G$ – последовательность одинаково распределенных длительностей обслуживания, распределение произвольное; $S = M$ – последовательность независимых, одинаково распределенных экспоненциально длительностей обслуживания на каждом приборе обслуживания. Буква κ обозначает число обслуживающих приборов в СМО. Буква B - число мест для ожидания в очереди (маскимальная длина очереди). Буква Z указывает число источников требований.

В СМО используются следующие обозначения:

λ - интенсивность входящего потока требований;

μ - интенсивность обслуживания требований одним прибором;

ρ - коэффициент использования обслуживающих приборов системы;

n - число требований в СМО;

$\overline{n}$ - математическое ожидание (м. о.) числа требований в СМО;

$\overline{b}$ - м.о числа требований в очереди;

$\overline{u}$ - м.о длительности пребывания требований в СМО;

$\overline{\nu}$ - м.о длительности обслуживания требования прибором, $\overline{\nu} = \dfrac{1}{\mu}$;

$\overline{w}$ - м.о длительности пребывания требований в очереди (времени ожидания);

p_n - стационарная вероятность пребывания в СМО точно n требований.

Известен *закон сохранения среднего потока требований*, согласно которому в *стационарном режиме СМО интенсивность выходящего потока равна интенсивности входящего потока.*

Большое значение для исследования открытых систем, когда входящие требования независимы от выходящих, имеет формула Литтла: $\overline{n} = \lambda\overline{u}$ или $\overline{b} = \lambda\overline{w}$.

Системы обслуживания типа $M/M/1$ **и** $M/G/1$. Система $M/M/1$ – система с пуассоновским входным потоком заявок, экспоненциальным законом распределения времени обслуживания и одним сервером.

Математическое ожидание числа требований в системе:

$$\overline{n} = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-\rho)\rho^k = (1-\rho)\left[\rho + 2\rho^2 + ...\right] =$$
$$= (1-\rho)\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Таким образом:

$$\overline{n} = \frac{\rho}{1-\rho}. \tag{1}$$

Среднее число требований в очереди равно

$$\overline{b} = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)p_k = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \tag{2}$$

Математическое ожидание длительности пребывания требования в СМО:

$$\overline{u} = \frac{\overline{n}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{1}{\mu}\frac{1}{(1-\rho)}. \tag{3}$$

Математическое ожидание длительности пребывания требования в очереди:

$$\overline{w} = \frac{\overline{b}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho^2}{(1-\rho)} = \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{(1-\rho)}. \tag{4}$$

Система $M/G/1$ – система с пуассоновским входящим потоком требований, произвольной длительностью их обслуживания, одним обслуживающим прибором и неограниченной очередью. Среднее число требований в системе определяется по формуле Поллачека-Хинчина, согласно которой

$$\overline{n} = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 D\xi}{2(1-\rho)}, \tag{5}$$

где $D\xi$ – дисперсия случайной величины, в соответствие с которой производится обслуживание требований.

СМО с приоритетной дисциплиной обслуживания. Часто возникают ситуации, когда в СМО поступают заявки, отличающиеся срочностью их обслуживания или «степенью важности». СМО подобного класса называются системами с приоритетом.

В системах с абсолютным приоритетом без ограничения на длину очереди заявка, обладающая приоритетом, немедленно принимается к обслуживанию каналом, занятым обслуживанием заявки без приоритета в обслуживании. После того, как требование, обладающее приоритетом, обслужено и в очереди нет других приоритетных заявок, возобновляется прерванное обслуживание заявки, не обладающей приоритетом.

В системах с относительным приоритетом заявка, не обладающая приоритетом, обслуживается до конца и только после завершения ее обслуживания начинает обслуживаться приоритетная заявка.

Для приоритетной дисциплины обслуживания требований точный расчет характеристик возможен только при следующих условиях: поток требований является пуассоновским; СМО содержит один обслуживающий прибор; нет ограничений на очередь. Другими словами, тип СМО – $M/M/1$ или $M/G/1$ без ограничений на очередь.

Нагрузка на СМО, создаваемая всеми требованиями, определяется следующим образом:

$$\rho = \sum_{i=1}^{R} \rho_i.$$

Пусть $\overline{x_i}$ - среднее время обслуживания требований с i-ым уровнем приоритета. Для СМО с *абсолютными приоритетами* средние времена пребывания требований в очереди рассчитываются по следующим формулам: для требований с высшим приоритетом (с приоритетом 1):

$$\overline{w_1} = \frac{\rho_1 \cdot \overline{x_1} \cdot (1+\varepsilon_1^2)}{2 \cdot (1-\rho_1)};$$

для требований с приоритетами $2, 3, \ldots, R$:

$$\overline{w_i} = \frac{\overline{x_i} \sum\limits_{j=1}^{i-1} \rho_j}{1 - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \rho_j} + \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} \rho_j \cdot \overline{x_j} \cdot (1+\varepsilon_j^2)}{2 \cdot (1 - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \rho_j) \cdot (1 - \sum\limits_{j=1}^{i} \rho_j)},\ i = 2, ...R.$$

Здесь ε_j – коэффициент вариации времени обслуживания заявок с j-ым уровнем приоритета.

Другие характеристики СМО определяются по следующим формулам (для СМО как с относительными, так и с абсолютными приоритетами). Среднее время пребывания требования в очереди:

$$\overline{w} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{R} \lambda_i \overline{w_i}}{\lambda}.$$

Среднее время пребывания требования в СМО:

$$\overline{u_i} = \overline{w_i} + \overline{x_i},\ i = 1, ..., R,$$

$$\overline{u} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{R} \lambda_i \overline{u_i}}{\lambda}.$$

Среднее число заявок в СМО:

$$\overline{n_i} = \lambda_i \overline{u_i},\ i = 1, ..., R,$$

$$\overline{n} = \sum_{i=1}^{R} \overline{n_i}.$$

Среднее число заявок в очереди:

$$\overline{b_i} = \overline{n_i} - \rho_i,\ i = 1, ..., R,$$

$$\overline{b} = \sum_{i=1}^{R} \overline{b_i}.$$

Третий раздел посвящен принципам построения имитационных моделей систем массового обслуживания. Имитационное моделирование есть процесс конструирования модели реальной системы и постановки экспериментов на этой модели с целью либо понять поведение системы, либо оценить (в рамках ограничений, накладываемых некоторым критерием или совокупностью критериев) различные стратегии, обеспечивающие функционирование данной системы. Таким образом, процесс имитационного моделирования это процесс, включающий и конструирование модели, и аналитическое применение модели для изучения некоторой проблемы.

В четвертом разделе строится имитационная модель системы массового обслуживания типа $M/M/1$ с приоритетной дисциплиной обслуживания.

СМО состоит из одного обслуживающего прибора и очереди неограниченной длины. Из источника требований в очередь системы обслуживания поступает два пуассоновских потока приоритетных и бесприоритетных требований с интенсивностью λ_1 и λ_2 соответственно. Суммарный входной поток всех заявок является простейшим с интенсивностью $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Постановка и выбор требований из очереди производятся в соответствии с приоритетом. Длительность обслуживания требований прибором является экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром μ_1 для приоритетных и μ_2 для бесприоритетных. Нужно построить имитационную модель такой системы $\hat{S}$. На основе этой модели должны быть вычислены оценки характеристик $\overline{u}, \overline{w}, \overline{n}$ системы обслуживания.

В систему поступают заявки 2 классов:

— с приоритетом 1;

— с приоритетом 2 (бесприоритетные).

Заявки приоритета 1 прерывают обслуживание заявок приоритета 2.

Требуется определить следующие характеристики работы системы: $\widetilde{\rho_1}$, $\widetilde{\rho_2}$ - коэффициент использования системы приоритетными и бесприоритетными требованиями соответственно; $\widetilde{b_1}$, $\widetilde{b_2}$ – среднее число приоритетных и бесприоритетных требований в очереди; $\widetilde{w_1}$, $\widetilde{w_2}$ - среднее время ожидания в очереди требования, обладающего и не обладающего приоритетом; $\widetilde{u_1}$, $\widetilde{u_2}$ - среднее время пребывания приоритетного и бесприоритетного требований в системе.

Для нахождения указанных характеристик в системе Matlab была написана программа, моделирующая работу данной СМО.

Входными данными программы являются следующие: λ_1, λ_2 - интенсивности входящих потоков приоритетных и бесприоритетных требований соответственно; μ_1, μ_2 - интенсивности обслуживания приоритетных и бесприоритетных требований соответственно; n - общее число требований.

Случайные величины для входящего потока и времени обслуживания генерируются с помощью встроенных команд системы Matlab.

В процессе работы программы создаются массивы:

t_pr – моменты прибытия требований; pr – приоритеты требований; t_obs – времена обслуживания требований; t_u – моменты, когда обслуженное требование покидает систему; t_ozz – времена ожидания обслуживания.

Затем эти массивы объединияются в матрицу $class$.

Выходными данными программы являются следующие: $\widetilde{\rho_1}$, $\widetilde{\rho_2}$ - коэффициенты использования системы приоритетными и бесприоритетными требованиями соответственно; $\widetilde{\rho}$ - коэффициент использования системы; $\widetilde{b_1}$, $\widetilde{b_2}$ - среднее число приоритетных и бесприоритетных требований в очереди; $\widetilde{b}$ - среднее число требований в очереди; $\widetilde{w_1}$, $\widetilde{w_2}$ - среднее время ожидания в очереди заявки, обладающей и не обладающей приоритетом; $\widetilde{w}$ - среднее время ожидания в очереди; $\widetilde{u_1}$, $\widetilde{u_2}$ - среднее время пребывания приоритетного и бесприоритетного требований в системе; $\widetilde{u}$ - среднее время пребывания требования в системе.

Коэффициент использования (загрузки) системы считается по формулам:

$$\widetilde{\rho_1} = \frac{\text{суммарное время обслуживания приоритетных требований}}{\text{время моделирования}},$$

$$\widetilde{\rho} = \widetilde{\rho_1} + \widetilde{\rho_2}.$$

Среднее число заявок в очереди считается по формулам:

$$\widetilde{b_1} = \frac{\text{суммарное время ожидания в очереди приоритетных заявок}}{\text{время моделирования}},$$

$$\widetilde{b_2} = \frac{\text{суммарное время ожидания в очереди бесприоритетных заявок}}{\text{время моделирования}},$$

$$\widetilde{b} = \frac{\text{суммарное время ожидания в очереди}}{\text{время моделирования}}.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди считается по формулам:

$$\widetilde{w_2} = \frac{\text{суммарное время ожидания в очереди бесприоритетных заявок}}{\text{количество бесприоритетных заявок}},$$

Среднее время пребывания заявки в системе:

$$\widetilde{u} = \frac{\text{суммарное время пребывания заявок в системе}}{\text{количество заявок}}.$$

В результате было создано несколько моделей СМО:

— модель системы $M/M/1$ с дисциплиной обслуживания FIFO;

— модель системы $M/M/1$ для ДО с абсолютным приоритетом и сбросом;

— модель системы $M/M/1$ для ДО с абсолютным приоритетом и дообслуживанием всех требований с приоритетом 2.

Поскольку конечной целью было построение имитационной модели системы $M/M/1$ для ДО с абсолютным приоритетом и дообслуживанием всех требований, то, для сравнения, аналогичные характеристики были рассчитаны по теоретическим формулам. Результаты расчетов приведены в таблице 1. Индекс «1» соответствует приоритетному требованию, «2» – бесприоритетному. Здесь $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 6$, $\lambda_2 = 4$, $\mu_2 = 8$, $n = 10^4$.

Характеристики системы для $n = 10^4$, полученные на основе дискретной модели, отличаются от соответствующих характеристик, полученных на основе теоретических формул, менее чем на 7%. Таким образом построенную имитационную модель системы $M/M/1$ с приоритетной ДО можно использовать для моделирования реальных систем, меняя интенсивности входных

Таблица 1 – Расчет практическихих и теоретических характеристик системы

Хар-ки	Расчет на основе дискретной модели	Расчет на основе теоретических формул
ρ_1	$\widetilde{\rho_1} = 0.1650$	$\overline{\rho_1} = 0.1667$
ρ_2	$\widetilde{\rho_2} = 0.4924$	$\overline{\rho_2} = 0.5000$
ρ	$\widetilde{\rho} = 0.6574$	$\overline{\rho} = 0.6667$
w_1	$\widetilde{w_1} = 0.0312$	$\overline{w_1} = 0.0333$
w_2	$\widetilde{w_2} = 0.3348$	$\overline{w_2} = 0.3500$
w	$\widetilde{w} = 0.2780$	$\overline{w} = 0.2867$
u_1	$\widetilde{u_1} = 0.1975$	$\overline{u_1} = 0.2000$
u_2	$\widetilde{u_2} = 0.4350$	$\overline{u_2} = 0.4750$
u	$\widetilde{u} = 0.4063$	$\overline{u} = 0.4200$
b_1	$\widetilde{b_1} = 0.0312$	$\overline{b_1} = 0.0333$
b_2	$\widetilde{b_2} = 1.3603$	$\overline{b_2} = 1.4000$
b	$\widetilde{b} = 1.3915$	$\overline{b} = 1.4333$

потоков и интенсивности обслуживания требований с различными приоритетами.

Также был проведен сравнительный анализ для СМО с приоритетами со сбросом, с дообслуживанием и без приоритетов (таблица 2). Здесь $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 6$, $\lambda_2 = 4$, $\mu_2 = 8$, $n = 10^4$.

Таблица 2 – Характеристики систем с приоритетами и без приоритетов

Хар-ки	СМО с приоритетами с дообслуживанием	СМО с приоритетами без дообслуживания	СМО без приоритетов
ρ	$\widetilde{\rho} = 0.6574$	$\widetilde{\rho_{pr}} = 0.5767$	$\widetilde{\rho_{fifo}} = 0.6724$
w	$\widetilde{w} = 0.2780$	$\widetilde{w_{pr}} = 0.1788$	$\widetilde{w_{fifo}} = 0.3283$
u	$\widetilde{u} = 0.4063$	$\widetilde{u_{pr}} = 0.2915$	$\widetilde{u_{fifo}} = 0.4560$
b	$\widetilde{b} = 1.3915$	$\widetilde{b_{pr}} = 0.8956$	$\widetilde{b_{fifo}} = 1.6428$
s	$\widetilde{s} = 0.3546$	$\widetilde{s_{pr}} = 0.4354$	$\widetilde{s_{fifo}} =$0.3276

На основании результатов таблицы 2 видно, что среднее время пребывания требования в системе с приоритетной ДО без дообслуживания приблизительно в $1.5-2$ раза меньше по сравнению с двумя остальными системами. Тоже самое можно сказать про среднее время ожидания в очереди и среднее число требований в очереди. Простой СМО без дообслуживания больше на 18-25%. Это связано с тем, что в такой СМО в первую очередь обслуживаются заявки с наивысшим приоритетом и часть заявок покидает систему недообслуженными или необслуженными вовсе. Потери при обслуживании заявок системой с приоритетной дисциплиной обслуживания, без дообслуживания прерванных, составляют 17.6%.

Если сравнивать СМО с приоритетами и дообслуживанием с СМО без приоритетов, то можно заметить эффективность работы первой СМО. Так, например, среднее время ожидания в очереди и среднее число требований в очереди для системы с приоритетами и дообслуживанием меньше на 15%, чем для СМО без приоритетов. При этом коэффициенты использования системы не сильно различаются.

Таким образом в процессе моделирования получена модель СМО с абсолютными приоритетами, которая позволяет увеличить количество обслуженных наиболее ценных заявок (с высоким приоритетом). Следовательно, система отказывает в обслуживании наименее ценным (бесприоритетным или низко приоритетным заявкам). Учитывая, что за фиксируемое время система способна обработать конечное число заявок, СМО с абсолютными приоритетами обеспечивает оптимальные параметры и характеристики эффективной работы системы.

По проведенным исследованиям можно выявить недостатки и достоинства СМО с приоритетной ДО.

Достоинства:

- учитывается приоритетность задач;

- снижается время ожидания в очереди приоритетных заявок.

Недостатки:

- заявки с низким приоритетом могут находиться длительное время в системе или остаться необслуженными;

- очень сложная реализация, поскольку сложно определить момент для пересчета приоритетов.

Недостатки бесприоритетной СМО:

- при увеличении нагрузки растет время ожидания обслуживания, при этом короткие заявки ждут столько же, сколько и длинные. То есть имеет место дискриминация процессов, постоянно присутствует вероятность откладывания обслуживания.

Достоинства бесприоритетной СМО:

- исключительная простота реализации;

- малый расход системных ресурсов на организацию.

В различных ситуациях применение рассмотренных моделей СМО имеет свой приоритет.

В заключении описаны результаты проделанной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Определены основные понятия, связанные с системами массового обслуживания. Изучены системы обслуживания с приоритетной дисциплиной обслуживания с пуассоновским входящим потоком заявок и экспоненциальным законом распределения длительности их обслуживания.

2. Изучены принципы и алгоритмы построения имитационной модели систем массового обслуживания.

3. Построена математическая модель изученной системы массового обслуживания. Разработана программа, моделирующая работу такой системы, и позволяющая вычислять основные характеристики системы на основании дискретной модели и по теоретическим формулам. Проведен сравнительный анализ практических и теоретических характеристик. Так же были разработаны дополнительные процедуры, моделирующие работу системы массового обслуживания с дисциплиной обслуживания FIFO, с приоритетной дисциплиной обслуживания и сбросом с пуассоновским входящим потоком требований и экспоненциальным законом распределения длительности их обслуживания. Были получены основные характеристики для всех СМО для одного и того же потока требований. Проведен сравнительный анализ соответствующих характеристик рассмотренных систем массового обслуживания с точки зрения эффективности их функционирования. Описание программного продукта, системные требования, программный код и результаты работы программы представлены в приложениях бакалаврской работы.