МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

Моделирование движения заглубляемого одностержневого контактного трала

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Графов Дмитрий Алексеевич

Научный руководитель
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент ________ Ю.А. Блинков

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент ________ Ю.А. Блинков

Саратов 2020

Введение. В данной дипломной работе будет рассматриваться поведение заглубляемого одностержневого и двухстержневого трала, которые могут быть использованы для траления якорных мин, выставленных на различных глубинах от поверхности воды и снабженных как контактными, так и неконтактными взрывателями, применяются контактные тралы всевозможных конструкций, отвечающие определенным требованиям. Они же предназначены для борьбы с плавающими, дрейфующими на заданном углублении контактными и неконтактными минами, а также с минными защитниками всех типов.

Современные контактные тралы представляют собой сложные гидродинамические комплексы, включающие активную (тралящую) часть, оснащенную резаками или подрывными патронами, углубитель, отводитель и защитные устройства. Существуют конструкции углубителей, удерживающих трал на заданном углублении как от поверхности воды, так и ото дна. Обычно используются отводители решетчатого или планерного типа. Основными активными элементами контактных тралов, воздействующими на мины, являются резаки, которые делятся на механические и взрывные. В тралах, служащих для обозначения или непосредственного уничтожения под водой якорных мин, вместо резаков используются пропускающие сигнализирующие либо пропускающие взрывные устройств.

Главными целями данной работы являются

1. Построение упрощённых одностержневой и двухстержневой моделей заглубляемого трала для математического описания которых, будут введены несколько допущений , связанных с отводителем и заглубителем.
2. Вывод уравнений Лагранжа второго рода для одностержневой и двухстержневой моделей заглубляемого трала через обобщенные координаты.
3. Написание программы на языке Python для подсчета значений решения уравнений Лагранжа, с выводом графиков для наглядности решения. Выбран метод Кейна для решения поставленной задачи.

Работа состоит из четырех частей. В первой теоретической части приведено изложение методов для построения систем дифференциальных уравнений для описания движения твердого тела в обобщенных координатах. Во второй практической части ведется построение моделей и вывод уравнений Лагранжа второго рода для одностержневого трала. Третья часть посвящена символьному построению необходимых уравнений с их дальнейшем численном интегрированием в четвертой части.

Рассмотрим метод Кейна:

- Основан на принципе Даламбера-Лагранжа.
- В уравнения не входят реакции связей.
- Алгоритм построения и форма уравнений движения ориентированы на машиное формирование уравнений движения.
- Метод разработан в 1961 проф. Т.Кейном.

Мы имеем уравнения движения системы точек:

$$m_i a_i - F_i + R_i = 0, \tag{1}$$

Умножимя каждое уравнение на соответствующее виртуальное перемещение δr_i и сложим все уравнения:

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i)\, \delta r_i + \sum_{i=1}^{N} R_i \delta r_i = 0. \tag{2}$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{N} R_i \delta r_i = 0. \tag{3}$$

Мы получаем общее уравнение динамики:

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i)\, \delta r_i = 0. \tag{4}$$

Мы имеем вариацию радиус-вектора $r_i(q_1, ..., q_n)$:

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{5}$$

Подставим (5) в (4) и получаем:

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0. \tag{6}$$

Дальше нужно изменить порядок суммирования в полученном равенстве

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \left(F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} - m_i a_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \tag{7}$$

Учитывая независимость вариаций обощенных координат, уравнение примет вид:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} - m_i a_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \tag{8}$$

Скорость точки

$$v_i = \frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial r_i}{\partial q_1} \dot{q_1} + \frac{\partial r_i}{\partial q_2} \dot{q_2} + ... + \frac{\partial r_i}{\partial q_n} \dot{q_n} + \frac{\partial r_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial r_i}{\partial t} \tag{9}$$

Таким образом частная производная скорости точки по обобщенной скорости:

$$u_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q_j}} \tag{10}$$

После чего подставим

$$\frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q_k}} \tag{11}$$

В уравнение движения, можем получить

$$\sum_{i=1}^{N} \left(F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} - m_i a_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q_j}} \right) = 0 \tag{12}$$

Или, если быть точнее:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(F_i\frac{\partial r_i}{\partial q_j}-m_i a_i u_{ij}\right)=0 \tag{13}$$

Обобщенные активные силы Q_i равны

$$Q_i=\sum_{i=1}^{N}F_i u_{ij} \tag{14}$$

Итак алгорит метода имеет вид:

- Выбираются обощенные координаты $q_1, q_2, ..., q_n$.
- Определяются выражения для скоростей точек приложения. сил и центров масс всех тел: v_i.
- Определяются линейные и угловые ускорения тел системы a_i, ε_i.
- Определяются частные скорости $u_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial q_j}$.
- Определяются силы и моменты.
- Вычисляются скалярные произведения сил, моментов и частных скоростей.

Упрощённая геометрия заглубляемого контактного трала приведена в соответствии с рисунком 1:

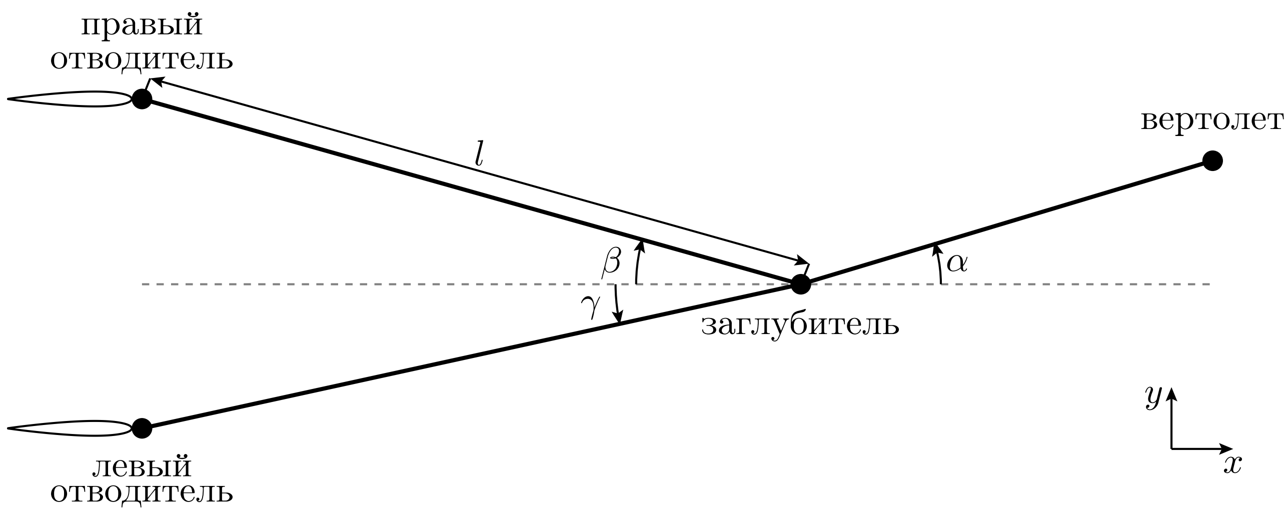

Рисунок 1 — Геометрия заглубляемого трала

Сплошные линии в соответствии с рисунком обозначают тросовые соединения. Отводители и заглубитель представляют собой подводные буи с крыльями, для математического описания которых введён ряд упрощающих модель допущений:

- глубина траления фиксирована и не зависит от динамики движения. Это предположение даёт возможность ограничиться построением модели только горизонтальной динамики движения подводной части трала;

- для тросовых соединений используется квазистатичная модель буксировочного троса в виде одного недеформируемого стержня;

- горизонтальная ориентация каждого буя всегда постоянно направлена по его тросовому соединению, т.е. предполагаем, что хвостовое оперение отводителя обеспечивает ему фиксированный угол к «недеформируемому стержню». Это предположение даёт возможность использовать коэффициенты лобового сопротивления и коэффициенты подъемной силы и в малых углах отклонения от фиксированного угла атаки для обеспечения боковое смещение крыльев отводителей.

В соответствии с рисунком 2 представленные силы действующие на заглубляемый трал и соответствующие им направления скоростей:

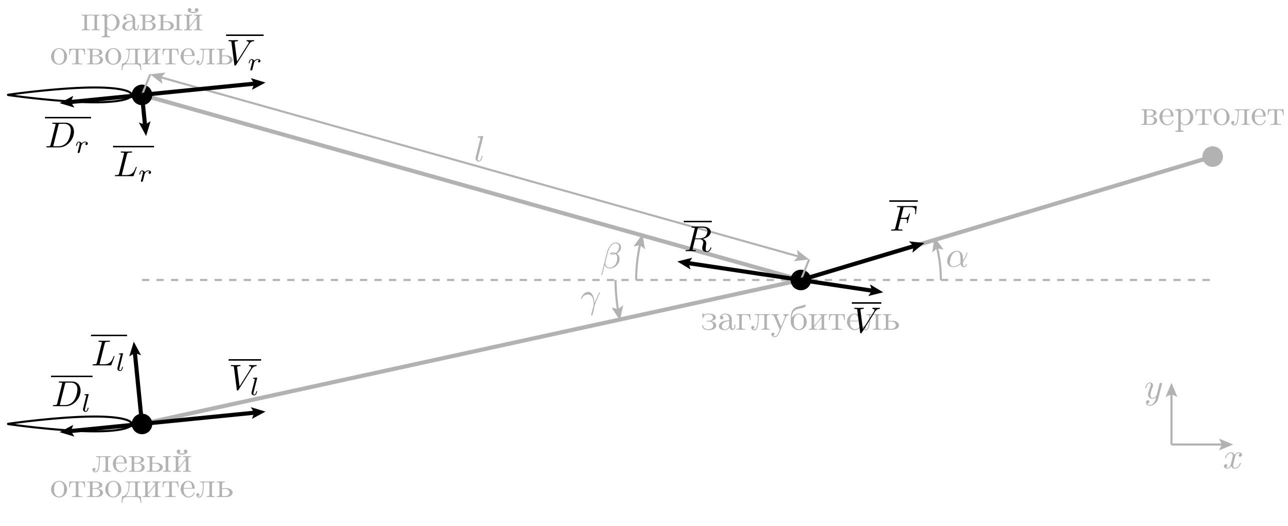

Рисунок 2 — Силы действующие на заглубляемый трал

Для описания модели введем следующие обобщенные координаты:

x, y - декартовы координаты заглубителя;

β — угол направления стержня правого отводителя;

γ — угол направления стержня левого отводителя.

В результате декартовы координаты левого заглубителя для определения кинетической энергии представим через обобщенные координаты

$$((x-\ell\cos(\beta),(y-\ell\sin(\beta)), \tag{15}$$

а декартовы координаты правого заглубителя

$$((x-\ell\cos(\gamma),(y-\ell\sin(\gamma)). \tag{16}$$

Кинетическая энергия системы T состоит из кинетической энергии отводителей с массой m_1 и заглубителя с массой m_2:

$$\begin{gathered}T=\frac{\ell m_1}{2}\left(\dot{\beta}\right)^2+\frac{\ell m_1}{2}\left(\dot{\gamma}\right)^2+\ell m_1\sin\left(\beta\right)\dot{\beta}\dot{x}+\ell m_1\sin\left(\gamma\right)\dot{\gamma}\dot{x}+\\+\ell m_1\cos(\beta)\dot{\beta}\dot{y}-\ell m_1\cos(\gamma)\dot{\gamma}\dot{y}+\frac{m}{2}(\dot{x})^2+\frac{m}{2}(\dot{y})^2+m_1(\dot{x})^2+m_1(\dot{y})^2\end{gathered} \tag{17}$$

Обозначим через c_d, c_{d1} коэффициенты лобового сопротивления заглуби теля и отводителей, а через $c_{\ell 1}$ коэффициент подъемной силы отводителей. Запишем действующие силы в декартовой системе координат.

Для заглубителя:

$$\left(F\cos(\alpha)-c_d\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\dot{x}, F\sin(\alpha)-\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\dot{x}\right) \tag{18}$$

Правый отводитель:

$$\begin{gathered}\left(\left(-c_{d1}\left(\ell\sin(\beta)\dot{\beta}+\dot{x}\right)+c_{d1}\left(\ell\cos(\beta)\dot{\beta}+\dot{y}\right)\right)\times\\\times\sqrt{\ell^2\left(\beta\right)^2+2\ell\sin(\beta)\dot{\beta}\dot{x}+2\ell\cos(\beta)\dot{\beta}\dot{y}+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2},\\-\left(c_{d1}\ell\sin(\beta)\dot{\beta}+c_{d1}\dot{x}+c_{\ell 1}\ell\cos(\beta)\dot{\beta}+c_{\ell 1}\dot{y}\right)\times\\\times\sqrt{\ell^2\left(\beta\right)^2+2\ell\sin(\beta)\dot{\beta}\dot{x}+2\ell\cos(\beta)\dot{\beta}\dot{y}+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\right).\end{gathered} \tag{19}$$

Левый отводитель:

$$
\begin{gathered}
((-c_{d1}\left(\ell\sin(\gamma)\dot{\gamma}+\dot{x}\right)+c_{d1}\left(\ell\cos(\gamma)\dot{\gamma}+\dot{y}\right))\times \\
\times\sqrt{\ell^2\left(\gamma\right)^2+2\ell\sin(\gamma)\dot{\gamma}\dot{x}+2\ell\cos(\gamma)\dot{\gamma}\dot{y}+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}, \\
-\left(c_{d1}\ell\sin(\gamma)\dot{\gamma}+c_{d1}\dot{x}+c_{\ell1}\ell\cos(\gamma)\dot{\gamma}+c_{\ell1}\dot{y}\right)\times \\
\left.\times\sqrt{\ell^2\left(\gamma\right)^2+2\ell\sin(\gamma)\dot{\gamma}\dot{x}+2\ell\cos(\gamma)\dot{\gamma}\dot{y}+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\right).
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Для определения обобщенных сил воспользуемся аналитическим способом:

$$
Q_i=\sum_{k=1}^{N}\left(F_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}+F_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial q_i}+F_{kz}\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right)
\tag{21}
$$

В результате имеем следующий вид обобщенных сил:

$$
\begin{gathered}
Q_x=F\cos(\alpha)-c_d\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\dot{x}+\left(-cd1\left(\ell\sin(\beta)\dot{\beta}+\dot{x}\right)+\right. \\
\left.+c_{\ell1}\left(\ell\cos(\beta)\dot{\beta}+\dot{y}\right)\right)\sqrt{\ell^2\left(\beta\right)^2+2\ell\sin(\beta)\dot{\beta}\dot{x}+2\ell\cos(\beta)\dot{\beta}\dot{y}+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}+ \\
+\left(-c_{d1}\left(\ell\sin(\gamma)\dot{\gamma}+\dot{x}\right)+\right. \\
+c_{\ell1}(\ell\cos(\gamma)\dot{\gamma}-\dot{y})\sqrt{\ell^2\left(\gamma\right)^2+2\ell\sin(\gamma)\dot{\gamma}\dot{x}+2\ell\cos(\gamma)\dot{\gamma}\dot{y}+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}
\end{gathered}
\tag{22}
$$

$$
\begin{gathered}
Q_y=F\sin(\alpha)-c_d\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\dot{y}+\left(-cd1\left(\ell\sin(\gamma)\dot{\gamma}+\dot{x}\right)+\right. \\
\left.+c_{\ell1}\left(\ell\cos(\gamma)\dot{\gamma}-\dot{y}\right)\right)\sqrt{\ell^2\left(\gamma\right)^2+2\ell\sin(\gamma)\dot{\gamma}\dot{x}+2\ell\cos(\gamma)\dot{\gamma}\dot{y}+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}- \\
-\left(c_{d1}\ell\sin(\beta)\dot{\beta}+c_{d1}\dot{x}+c_{\ell1}\ell\cos(\beta)\dot{\beta}+\right. \\
\left.+c_{\ell1}\dot{y}\right)\sqrt{\ell^2\left(\beta\right)^2+2\ell\sin(\beta)\dot{\beta}\dot{x}+2\ell\cos(\beta)\dot{\beta}\dot{y}+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}
\end{gathered}
\tag{23}
$$

$$
Q_\beta = \frac{\ell}{2}\sqrt{\ell^2\left(\beta\right)^2 + 2\ell\sin(\beta)\dot{\beta}\dot{x} + 2\ell\cos(\beta)\dot{\beta}\dot{y} + (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\times
$$
$$
\times\left(\sqrt{2}c_{d1}\ell\cos\left(2\beta + \frac{\pi}{4}\right)\dot{\beta} - c_{d1}\ell\dot{\beta} - 2\sqrt{2}c_{d1}\sin\left(\beta + \frac{\beta}{4}\right)\dot{x}-
$$
$$
-\sqrt{2}c_{\ell1}\ell\cos\left(2\beta + \frac{\pi}{4}\right)\dot{\beta} - c_{\ell1}\ell\dot{\beta} - 2\sqrt{2}c_{\ell1}\cos\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)\dot{y}\right) \tag{24}
$$

$$
Q_\gamma = \frac{\ell}{2}\sqrt{\ell^2\left(\gamma\right)^2 + 2\ell\sin(\gamma)\dot{\gamma}\dot{x} + 2\ell\cos(\gamma)\dot{\gamma}\dot{y} + (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\times
$$
$$
\times\left(\sqrt{2}c_{d1}\ell\sin\left(2\gamma + \frac{\pi}{4}\right)\dot{\gamma} - c_{d1}\ell\dot{\gamma} - 2\sqrt{2}c_{d1}\cos\left(\gamma + \frac{\beta}{4}\right)\dot{x}+
$$
$$
+\sqrt{2}c_{\ell1}\ell\sin\left(2\gamma + \frac{\pi}{4}\right)\dot{\gamma} - c_{\ell1}\ell\dot{\gamma} - 2\sqrt{2}c_{\ell1}\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)\dot{y}\right) \tag{25}
$$

Уравнения Лагранжа второго рода

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = Q_i \tag{26}
$$

для рассматриваемой системы примут вид:

$$
\ell m_1\sin(\beta)\ddot{\beta} + \ell m_1\sin(\gamma)\ddot{\gamma} + \ell m_1\cos(\beta)\left(\dot{\beta}\right)^2 + \ell m_1\cos(\gamma)(\dot{\gamma})^2+
$$
$$
+m\ddot{x} + 2m_1\ddot{x} = Q_x \tag{27}
$$
$$
-\ell m_1\sin(\beta)\left(\dot{\beta}\right)^2 + \ell m_1\sin(\gamma)(\dot{\gamma})^2 + \ell m_1\cos(\beta)\ddot{\beta} + \ell m_1\cos(\gamma)\ddot{\gamma}+
$$
$$
+m\ddot{y} + 2m_1\ddot{y} = Q_y \tag{28}
$$

$$
\ell m_1\left(\ell\ddot{\beta} + \sin(\beta)\ddot{x} + cos(\beta)\ddot{y}\right) = Q_\beta \tag{29}
$$
$$
\ell m_1\left(\ell\ddot{\gamma} + \sin(\gamma)\ddot{x} + cos(\gamma)\ddot{y}\right) = Q_\gamma \tag{30}
$$

В соответствии с рисунком 3 были использованы данные модели обтекание профиля NACA 0012 для моделирования характеристик отводителя.

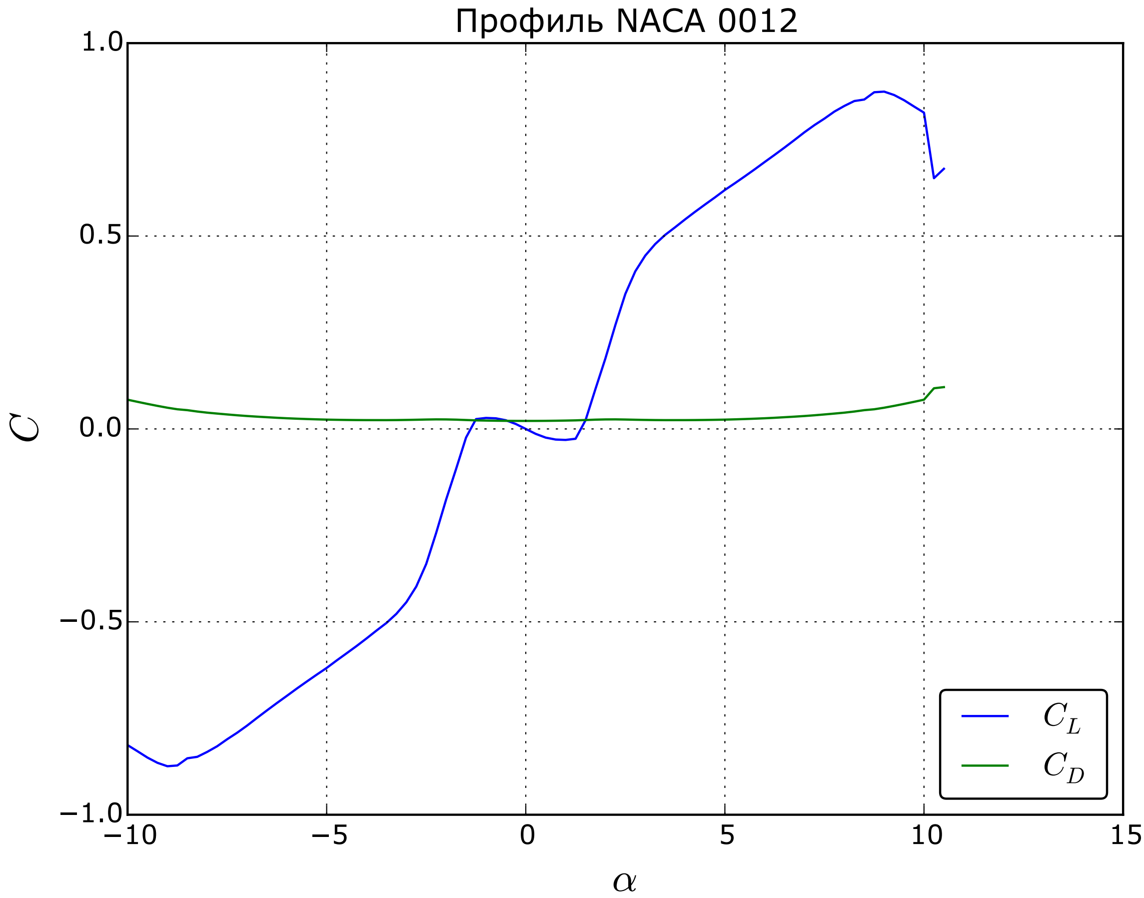

Рисунок 3 — Аэродинамические характеристики NACA 0012

В соответствии с рисунком 4 с помощью разработанной программы проведено численное моделирование и представлено в соответствии с рисунком 4 и дало правдоподобный результат

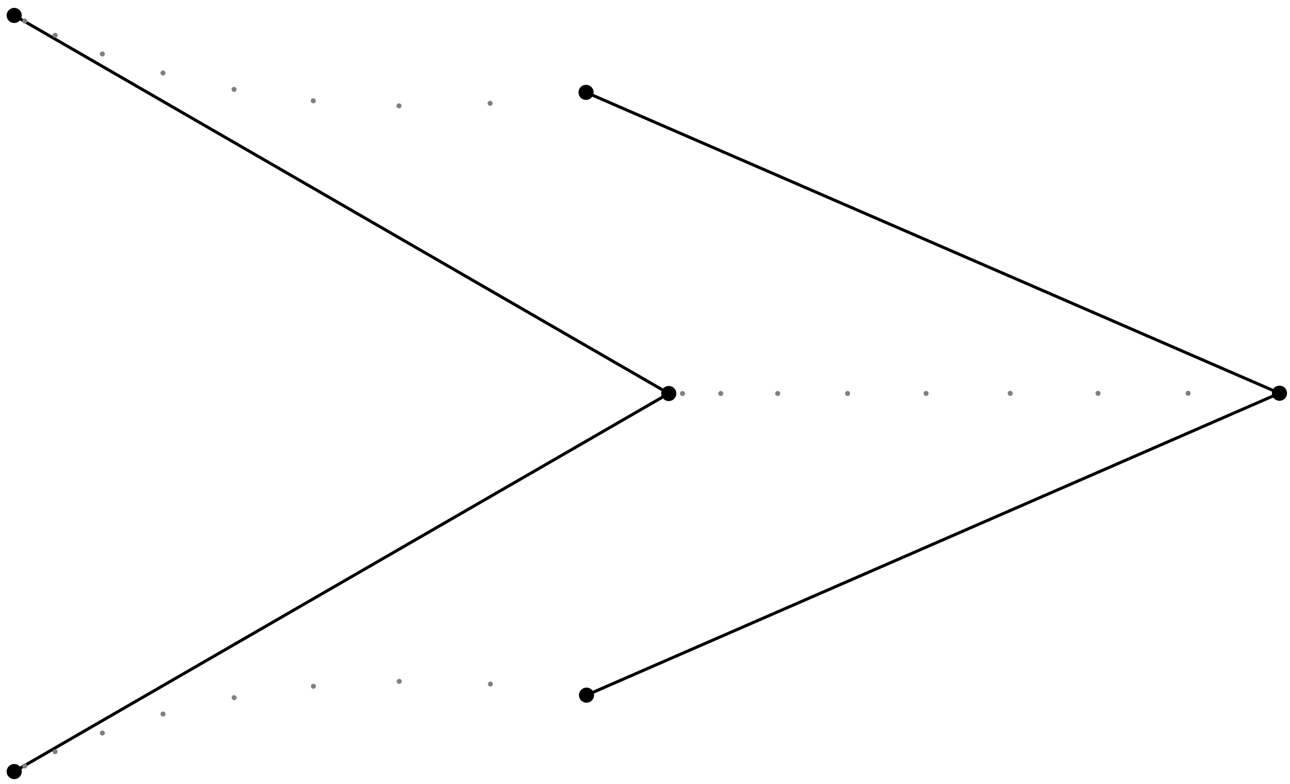

Рисунок 4 — Картина движения одностержневого трала

Заключение. В данной бакалаврской работе проведено моделирование заглубляемого одностержневого и двухстержневого трала средствами теоретической механикой. Были получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений для описания предлагаемых моделей и проведены вычислительные эксперименты.