МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

Одномерные автомодельные движения газа при нулевом градиенте температуры

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы
направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Рожиной Галины Владимировны

Научный руководитель
старший преподаватель ______________ В. С. Кожанов

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент ______________ Ю.А. Блинков

Саратов 2020

Введение. Теория неустановившихся одномерных течений занимает важное место в современной газовой динамике. Ее фундаментальные основы были заложены Л.И. Седовым, К.П. Станюковичем, Я.Б. Зельдовичем, Ю.П. Райзеном и другими выдающимися учеными. В рамках указанной теории интенсивно исследуются две задачи, имеющие немаловажное прикладное значение: задача о сильном точечном взрыве и задача о сходящейся ударной волне. В данной работе эти задачи рассматриваются для случая, когда ударная волна распространяется в газе принулевом градиенте температуры.

Впервые задача о сильном точечном взрыве была решена независимо Л.И. Седовым и Тейлором. Применение теории размерностей помогло Седову получить один дополнительный первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих решение, что, в свою очередь, привело к точному аналитическому решению задачи. Полученный интеграл выражает собой закон сохранения полной энергии, выделившейся при взрыве, внутри области, ограниченной расходящейся ударной волной. Отметим, что в классической постановке течение за фронтом ударной волны полагается адиабатическим. В дальнейшем теория точечного взрыва получила мощное развитие.

Другим предельным случаем является случай, когда условие адиабатичности за фронтом ударной волны заменяется условием гомотермичности. Впервые задача о сильном точечном взрыве в такой постановке была рассмотрена В.П. Коробейниковым и, независимо, О.С. Рыжовым и Г.И. Тагановым. Авторами был изучен случай сферической симметрии движения. Закон сохранения полной энергии при гомотермическом течении не выполняется.

Задача о сильной сходящейся ударной волне впервые была решена Гудерлеем в 1942 г. В классической постановке течение за фронтом ударной волны также является адиабатическим. Задача о сильной сходящейся ударной волне для случая гомотермического течения рассматривалась Т.А. Журавской и В.А. Левиным, а также А.Д. Зубовым и М.А. Зубовым.

Целью работы является исследование течения, возникающего за фронтом сильной расходящейся или сходящейся ударной волны в малой окрестности центра или оси симметрии. В таком случае задача допускает автомодельную постановку.

Для исследования применяется СКА Maple, то можно отнести к новизне работы.

Работа содержит два раздела. В первом разделе даётся обзор и приводятся основные положения теории точечного взрыва, которые упрощают понимание рассматриваемой задачи и её приложений и приводится решение задачи об одномерном сильном точечном взрыве в однородной газовой среде при нулевом градиенте температуры для случаев плоской, цилиндрической и сферической симметрии течения. Во втором разделе приводится решение задачи об распространении сходящихся сферических и цилиндрических ударных волн в идеальном газе в случае гомотермического течения. Результаты расчётов представлены в виде таблицы и графиков.

Основное содержание работы. Понятие о гомотермических течениях. Течения сплошной среды, при которых $T = T(t)$, называются гомотермическими, в отличие от изотермических, когда температура вообще считается постоянной, $T = const$.

Отметим задачу о мощном подводном взрыве, начальная стадия которого рассчитывается по автомодельному решению в приближении гомотермичности среды.

Для гомотермических задач термическое уравнение состояния допускает следующую общую форму :

$$P = \Psi(T)\varphi(\rho/\rho_0),$$

где $\varphi(\rho/\rho_0)$ – произвольная функция приведенной плотности, а $\Psi(T)$ функция температуры, которая может зависеть только от времени.

Ограничимся здесь следующей формой уравнения состояния

$$P = c^2\rho,\ c = c_T = \sqrt{\frac{R_0 T}{\mu}},$$

где R_0 – универсальная газовая постоянная; c – изотермическая скорость звука; μ – молекулярный вес газа.

В отличие от адиабатического случая, в гомотермическом случае автомодельной сходящейся ударной волны не выполняется закон сохранения энергии, что, например, представляет интерес при отладке численных газодинамических методик на стадии отладки без энергетического уравнения.

Эта задача представляет и несомненный теоретический интерес, в том числе в исследованиях, связанных с процессами, обусловленными внешним нагревом лазерным или другим излучением, пронизывающим оптически тонкий, малоплотный газ. Отмеченный режим может создаваться и теплопроводной тяжёлой оболочкой. Реальный тепловой импульс в гомотермическом газе можно аппроксимировать полученным ниже асимптотическим профилем.

При таком режиме кумуляции достигается не только высокая плотность энергии, но и возможно получение произвольно высоких плотностей вещества, в отличие от адиабатического случая, при котором сжатие не может превосходить величины $(\gamma+1)/(\gamma-1)$, где γ — показатель адиабаты газа.

Постановка задачи о точечном взрыве в газе. Рассмотрим постановку задачи о точечном взрыве. В момент $t=0$ в покоящейся среде, которую для определенности будем считать газом, в точке, вдоль прямой или вдоль плоскости происходит взрыв, т. е. мгновенно выделяется конечная энергия E_0. В случае цилиндрического заряда энергия E_0 рассчитана на единицу длины, для плоского заряда – на единицу площади. В этой постановке мы не учитываем массу, форму и размеры вещества, выделяющего энергию.

При взрыве на границе области возмущенного движения имеется резкий скачок характеристик движения, т. е. образуется ударная волна. Требуется определить движение газа за фронтом ударной волны и закон движения ударной волны, если известны начальная плотность покоящегося газа ρ_1 и начальное давление p_1. Плотность ρ_1 и давление p_1 будем считать постоянными.

Если принять, что газ является совершенным и для движения за ударной волной выполняется условие адиабатичности, то задача сводится к интегрированию системы уравнений в частных производных.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + v\dfrac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\nu-1}{r}v\right) = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + v\dfrac{\partial p}{\partial r} + \gamma p\left(\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\nu-1}{r}v\right) = 0. \end{cases}$$

Граничными условиями для задачи являются условия на фронте ударной волны

$$\upsilon_2 = \frac{2}{\gamma+1}\frac{1-q}{\sqrt{q}}a_1, \quad \rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1+2q}q_1, \quad p_2 = \frac{2\gamma-(\gamma-1)\,q}{(\gamma+1)\,q}.$$

Вместо условия адиабатичности течения за фронтом ударной волны предпологается наличие интенсивного теплообмена. Вследствие этого примем, что в области движения газа отсутсвует градиент температуры, т. е. $\dfrac{\partial T}{\partial r} = 0$. Это предположение о характере течения соответствует начальной стадии развития взрыва большой мощности (например, атомного взрыва), когда в области течения газ имеет высокую температуру, и в следствии излучения и теплопроводности происходит сильный теплообменмежду частицамигаза. В атомном взрыве это будет соответствовать примерно той стадии развития взрыва, когда фронт ударной волны еще не оторвался от огненого шара. В силу вышеуказанных предположени, температура в области течения зависит только от времени и не зависит от расстояния до центра взрыва, т. е. $T = T(t)$.

Такие течения, когда $T = T(t)$, мы будем называть гомотермическими, в отличие от изотермических, когда температура считается вообще постоянной ($T = const$).

Так же, будем считать, что начальная плотность ρ_1 покоящегося газа зависит от координаты ξ следующим образом:

$$\rho_1 = \frac{A}{\xi^{\omega}}, \tag{1}$$

где A – положительная постоянная с размерностью $[A] = ML^{\omega-3}$, ω – отвлеченная постоянная.

Система уравнений в частных прооизводных, описывающая рассматриваемые одномерные неустановившиеся движения, иммет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial r} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \upsilon\dfrac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\left(\dfrac{\partial \upsilon}{\partial r} + \dfrac{\nu-1}{r}\upsilon\right) = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial r} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Сильная сходящаяся волна при гомотермическом течении. Рассмотрим задачу о распространении сходящихся сферических и цилиндрических ударных волн в идеальном газе в случае гомотермического течения.

Идеализируя реальный процесс, будем считать, что энергия поступает в неограниченный объем газа на бесконечности, в результате чего образуется сильная ударная волна. Обозначим искомую зависимость радиуса этой ударной волны от времени t через $R(t)$. Предположим, что ударная волна распространяется в стационарном газе с постоянной начальной плотностью ρ_0.

Поскольку поток газа однородной температуры, то ударная волна зависит только от времени t. Эта модель описывает газ с бесконечно высокой теплопроводностью так, что температура в среде выравнивается за очень короткое время. Скорость движения газа имеет только радиальная составляющая u и она, как давление p и плотность ρ, зависит только от времени и радиальной координат r в сферической системе координат (или, соответственно, в цилиндрической системе координат).

Кроме того, мы будем считать, что ударная волна достигает центра симметрии в момент времени $t = 0$, т. е. в момент времени $t < 0$ соответствует движению газа до того, как она сфокусируется.

Следовательно, искомые функции $\rho(r,t)$, $u(r,t)$, $T(t)$ и $p(r,t)$ в области $(r,t) : t < 0; r > R(t)$ описывается следующей системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{(\nu-1)\rho u}{r} = 0, \quad \dfrac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{R_0 T}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \quad p = \rho R_0 T \end{cases} \tag{3}$$

где R_0 – газовая постоянная, а ν – размерность пространства ($\nu = 3$ для сферических ударных волн и $\nu = 2$ для цилиндрических ударных волн). Отношения при скачке давления имеют вид

$$u(R(t),t) = \frac{2}{\gamma+1}D(t), \quad \rho(R(t),t) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0, \quad T(t) = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2 R_0}D^2(t) \tag{4}$$

где $D(t) = R(t)$ - скорость ударной волны, а $y > 1$ – адиабатический индекс Пуассона.

Случай постоянной начальной плотности газа. При $\omega = 0$ уравнение имеет вид:

$$\overline{f}' = \frac{\frac{\nu}{2}(\Lambda - \overline{f})\Lambda - (\nu - 1)}{1 - (\Lambda - \overline{f})^2}\frac{\overline{f}}{\Lambda}. \tag{5}$$

Для исследования поведени ярешения уравнения (5) рассмотрим поле интегральных кривых этого уравнения. Это даст нам возможность из множества интегральных кривых найти единственную интегральную кривую, которая удволетворяет граничным условиям .

Исследуем уравнение (5) при различных значениях ν.

а) Случай сферической симметрии. При $\nu = 3$ уравнение (5) в интересующей нас области плоскости Λ, $\overline{f}$ имеет следующие особые точки:

$$O(0,0), \quad A(1,0), \quad B\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{3}\right).$$

Особая точка O является седлом. В нее входят две интегральные кривые: прямая $\Lambda = 0$ и прямая $\overline{f} = 0$. Особая точка A – узел, причем в точку A входит интегральная кривая $\overline{f} = 0$. В особой точке B имеем седло, в нее входят две интегральные кривые с наклоном касательных

$$N_1 = 1,3624, \quad N_2 = -0,4624.$$

Граничное условие на ударной волне

$$\overline{f}_2(\Lambda_2) = \frac{1}{2}(\Lambda_2 + \sqrt{\Lambda_2^2 - 4})$$

дает нам в плоскости Λ, $\overline{f}$ кривую, котрую должна пересекать искомая интегральная кривая.

б) Случай цилиндрической симметрии. При $\nu = 2$ из уравнения (5) имеем:

$$\overline{f}' = \frac{\overline{f}}{\Lambda}\frac{\Lambda(\Lambda - \overline{f}) - 1}{1 - (\Lambda - \overline{f})^2}. \tag{6}$$

Для конечных значений Λ это уравнение имеет две особые точки $O(0,0)$ и $A(0,1)$. Особая точка O – седло. В эту точку входят прямые $\overline{f} = 0$, $\Lambda = 0$.

Точка A есть особая точка рационального характера. Критическими направлениями, т. е. напрвлениями, вдоль которых кривые входят в особую точку, являются $N_1 = 0,\ N_2 = 1$.

в) Случай плоской симметрии. В случае плоской симметрии имеем:

$$\overline{f}' = \frac{\overline{f}(\Lambda - \overline{f})}{2[1 - (\overline{f} - \Lambda)^2]}. \tag{7}$$

Случай переменной начальной плотности газа. Будем рассматривать только случай сферической симметрии ($\nu = 3$), так как он представляет наибольший интерес. Уравнение

$$\overline{f}' = \frac{\dfrac{\nu - \omega}{2}\Lambda\overline{f}(\Lambda - \overline{f}) + \omega\Lambda - (\nu - 1)\overline{f}}{\Lambda[1 - (\Lambda - \overline{f})^2]}. \tag{8}$$

в области течения за фронтом ударной волны имеет особые точки. Число этих особых точек и их характер зависят от величины ω. Нас интересует такой интервал изменения ω:

$$0 < \omega < 3.$$

Этот интервал можно разбить на три части:

$$1)0 < \omega < \omega_{11}; \quad 2)\omega_{11} < \omega < \omega_{22}; \quad 3)\omega_{22} < \omega < 3,$$

где ω_{11} и ω_{22} определим ниже.

1) $0, \omega < \omega_{11}$. Для значений ω, лежащих в интервале 1), уравнение (8) имеет три особые точки:

$$O(0,0), \quad A(\Lambda_A, \overline{f}_A), \quad B(\Lambda_B, \overline{f}_B).$$

Координаты точек A и B определяются по формулам

$$\begin{cases} \overline{f}_A = -\dfrac{\omega - 1}{2(3 - \omega)} + \sqrt{\dfrac{(\omega - 1)^2}{2(3 - \omega)^2} - \dfrac{2\omega}{3 - \omega}}; \quad \Lambda_A = \overline{f}_A + 1, \\ \overline{f}_B = -\dfrac{\omega - 1}{2(3 - \omega)} - \sqrt{\dfrac{(\omega - 1)^2}{2(3 - \omega)^2} - \dfrac{2\omega}{3 - \omega}}; \quad \Lambda_B = \overline{f}_B + 1; \end{cases} \tag{9}$$

2) $\omega_{11} < \omega < \omega_{22}$. Уравнение (8) в этом случае имеет только одну особую точку $O(0,0)$.

3) $\omega_{22} < \omega < 3$. Для ω лежащих в интервале 3), уравнение (8) имеет три особые точки: $O(0,0)$, A и B. В этом случае координаты точек A и B находятся по формулам

$$\begin{cases} \overline{f}_A = \dfrac{\omega-1}{2(3-\omega)} + \sqrt{\dfrac{(\omega-1)^2}{2(3-\omega)^2} - \dfrac{2\omega}{3-\omega}}; \quad \Lambda_A = \overline{f}_A - 1, \\ \overline{f}_B = \dfrac{\omega-1}{2(3-\omega)} - \sqrt{\dfrac{(\omega-1)^2}{2(3-\omega)^2} - \dfrac{2\omega}{3-\omega}}; \quad \Lambda_B = \overline{f}_B - 1. \end{cases} \tag{10}$$

Указанные выше значения ω_{11} и ω_{22} – корни квадратного уравнения, которое получится,если приравнять подкоренное выражение в (9) к нулю:

$$\omega_{11} = \frac{13-4\sqrt{10}}{9} \approx 0,039; \qquad \omega_{22} = \frac{13+4\sqrt{10}}{9} \approx 2,850.$$

В случаях, когда $\omega = \omega_{11}$ или $\omega = \omega_{22}$, уравнение (8) имеет только две особые точки: точку O и точку A, так как в этих случаях $\Lambda_A = \Lambda_B$ и $\overline{f}_A = \overline{f}_B$. В особой точке O при любом значкении ω имеем седло.

Сильная сходящаяся волна при гомотермическом течении. Постановка задачи и предварительные преобразования. Рассмотрим вопрос о распространении сферических и цилиндрических ударных волн (УВ) в совершенном газе переменной начальной плотности при гомотермическом течении .

Идеализируя реальный процесс, будем считать, что к неограниченному объему газа на бесконечности подведена энергия, в результате чего образуется сильная УВ (противодавлением принебрегаем); искомую зависимость радиуса этой ударной волны от времени t будем обозначать $R(t)$. Предполагаем, что УВ распространяется по покоящемуся газу с переменной начальной плотностью ρ_0, распределенной в пространстве по степенному закону с показателем ω.

$$\rho_0 = ar^{\omega}, \quad a = const$$

За УВ течение газа непрерывно и одномерно.

В силу гомотермичности течения температура газа T за УВ зависит только от времени t. Эта модель описывает газ с бесконечно большой теплопроводностью так, что температура в среде выравнивается за очень короткое время. Скорость движения газа имеет только радикальную составляющую u и она, как давление p и плотность ρ, зависит только от времени и радиальной координаты r в сферической системе координат (или, соответственно, в цилиндрической) системе координат.

Кроме того, будем считать, что УВ достигает центра симметрии в момент времени $t = 0$, т. е. в момент времени $t < 0$ соответствует движению газа до того, как она сфокусируется.

Следовательно, искомые функции $\rho(r,t)$, $u(r,t)$, $T(t)$ и $p(r,t)$ в области $(r,t) : t < 0; r > R(t)$ описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{(\nu-1)\rho u}{r} = 0, \quad \dfrac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{R_0 T}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \quad p = \rho R_0 T \end{cases} \tag{11}$$

где R_0 – газовая постоянная, а ν – размерность пространства ($\nu = 3$ для сферических ударных волн и $\nu = 2$ для цилиндрических УВ).

Соотношения при скачке давления имеют вид

$$u(R(t),t) = \frac{2}{\gamma+1}D(t), \quad \rho(R(t),t) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0, \quad T(t) = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2 R_0}D^2(t) \tag{12}$$

где $D(t) = R(t)$ – скорость УВ, $y > 1$ – адиабатический индекс Пуассона.

Технологии, используемые в работе. Maple – система компьютерной математики, рассчитанная на широкий круг пользователей. До недавнего времени ее называли системой компьютерной алгебры, что указывало на особую роль символьных вычислений и преобразований, которые способна осуществлять эта система. Но такое название сужает сферу применения системы. На самом деле она способна выполнять быстро и эффективно не только символьные, но и численные расчеты, причем сочетает это с превосходными средствами графической визуализации и подготовки электронных документов.

Maple – типичная интегрированная система. Она объединяет в себе:

- мощный язык программирования (он же язык для интерактивного общения с системой);

- редактор для подготовки и редактирования документов и программ;

- современный многооконный пользовательский интерфейс с возможностью работы в диалоговом режиме;

- мощную справочную систему со многими тысячами примеров;

- ядро алгоритмов и правил преобразования математических выражений; численный и символьный процессоры;

- систему диагностики;

- библиотеки встроенных и дополнительных функций;

- пакеты функций сторонних производителей и поддержку некоторых других языков программирования и программ.

Заключение. В бакалаврской работе задача о точечном взрыве рассмотрена как для сферических, так и для цилиндрических и плоских взрывных волн.В случае цилиндрического заряда энергия E_0 была рассчитана на единицу длины, для плоского заряда – на единицу площади. В этой постановке мы не учитывали массу, форму и размеры вещества, выделяющего энергию. Также рассмотрены случаи постоянной и переменной начальной плотности газа.

Результаты решения задачи о сходящейся УВ таковы:

- отказ от учета противодавления позволил свести исследование сложной нелинейной системы (2.1), описывающей течение, к исследованию одного ОДУ (2.6) на плоскости $(\xi,\ f)$;
- проведено исследование решения задачи на плоскости $(\xi,\ f)$, изучены особые точки уравнения (2.6) и поля интегральных кривых в окрестности этих точек;
- установлены интервалы изменения показателя автомодельности n для значений $1 \leq \gamma \leq 3$. Точное значение показателя n определяется из решения краевой задачи для уравнения (2.6), которое состоит в том, чтобы интегральная кривая этого уравнения соединяла особую точку

и точку соответствующую ударной волне. Вычислены значения n для ряда значений ω и γ для случая цилиндрической и сферической симметрии. При $\gamma \geq 3$ задача имеет бесчисленное множество решений;

- построены графики зависимостей безразмерных представителей скорости и давления и описан характер их поведения;

В целом следует отметить, что учёт отдельных особенностей течения (в данном случае гомотермичности) отражает поведение реального процесса не в полной мере. В какой именно – это предемет отдельного исследования.