

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического и компьютерного моделирования

**Температурный пограничный слой на поверхности
тонкой пористой пластины**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика»

механико-математического факультета

Суровицкой Наталья Николаевны

Научный руководитель

Старший преподаватель

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

В.С.Кожанов

инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

Зав. кафедрой, д.ф.-м.н., доцент

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

Ю.А. Блинков

инициалы, фамилия

Введение. Новые этапы развития авиационной и ракетной техники поставил перед конструкторами и учёными много новых комплексных физических задач.

Введение пограничного слоя позволяет существенно упростить моделирующие течение жидкости/газа уравнения путём разделения потока на две области: на область очень тонкого слоя вблизи тела (пограничный слой), где трение играет существенную роль, и на область вне этого слоя, где трением можно пренебрегать.

Эта гипотеза, с одной стороны, позволила получить физически очень наглядное объяснение важной роли вязкости в проблеме сопротивления, а с другой стороны, дала возможность преодолеть математические трудности и тем самым открыла путь теоретическому исследованию течений жидкости с трением.

Существует множество вариантов задач с пограничным слоем. Одним из актуальных являются задачи с пограничным слоем, возникающим при набегаии жидкости на полубесконечную тонкую пластину.

В бакалаврской работе рассматривается задача о набегаии потока вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости со скоростью $U(x)$ на тонкую полубесконечную пластину. Через пронцаемую поверхность пластины вдувается или всасывается жидкость с теми же параметрами, что и параметры набегающего потока, со скоростью

$$V_y(x) = Ax^\alpha (A = \text{const}, \alpha = \text{const}).$$

На поверхности пластины поддерживается постоянная температура

$$T = T_w.$$

Здесь рассматривается набегаии ньютоновской несжимаемой жидкости и степенной неньютоновской жидкости с нелинейной теплопроводностью на полубесконечную пронцаемую пластину при условии пренебрежения теплом и граничные условия. Выполнен переход к автомодельной постановке задачи.

Решение данной задачи представляет собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-ого порядка с применением языка программирования Python.

В отличие от многих других работ особенностью данной работы является то, что в ней рассмотрен случай неньютоновской жидкости и для решения данной задачи применяется язык программирования Python.

Основное содержание работы содержит 4 раздела:

1. Введение
2. Обтекание пористой пластины степенной ньютоновской жидкости
3. Обтекание потистой пластины степенной неньютоновской жидкости с нелинейной теплопроводностью
4. Заключение

Во **Введении** формулируется цель работы и решаемые задачи.

В **Первом разделе** решается задача об обтекание пористой пластины степенной ньютоновской жидкости.

Во **Втором разделе** решается задача об обтекание потистой пластины степенной неньютоновской жидкости с нелинейной теплопроводностью.

В **Заключении** подводятся итоги решенных задач.

Случай ньютоновской жидкости Когда набегающая жидкость является обычной ньютоновской несжимаемой жидкостью, течение в окрестности пластины при условии пренебрежения теплом, которое выделяется вследствие работы сил вязкости, описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2)$$

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (3)$$

Граничные условия на поверхности пластины имеют вид при

$$y = 0, x \geq 0 : u = 0, v = V_y(x) = Ax^\alpha (A = \text{const}, \alpha = \text{const}), T = T_w. \quad (4)$$

Граничные условия вдали от пластины («на бесконечности») имеют вид при

$$y \rightarrow \infty : u \rightarrow U_\infty, T \rightarrow T_\infty. \quad (5)$$

Схема течения изображена в соответствии с рисунком 1.

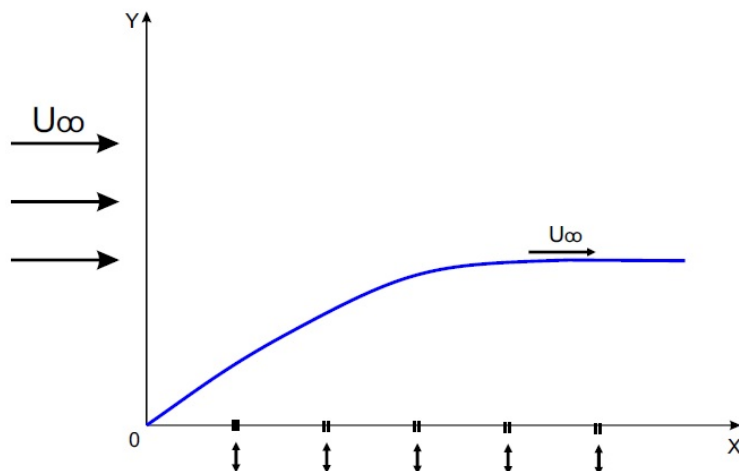


Рисунок 1 — Схема течения

Переходим к автомодельной переменной

$$x = L\bar{x}, y = Y\bar{y}, u = U_\infty\bar{u}, v = V\bar{v}, T = T_\infty + \frac{U_\infty^2}{c}\theta(\eta) \quad (6)$$

Необходимо ввести функцию тока и найти масштабы функции Ψ .

$$\psi = \Psi\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (7)$$

Проведено ряд тождественных преобразований, которые позволят уменьшить присутствие масштаба L в функции тока ψ .

Получено дифференциальное уравнение для определения функции $\varphi(\eta)$.
Запишем частные производные от переменной η :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{\rho}{\mu x}} U_\infty \quad (8)$$

Вычислены компоненты вектора скорости:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) описывает поведение функции $\varphi(\eta)$ в области $0 \leq \eta < \infty$:

$$-\frac{1}{2}\varphi \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} = \frac{d^3\varphi}{d\eta^3}.$$

$$\mathbf{Pr} \left(-\frac{1}{2}\varphi \frac{d\theta}{d\eta} - \left(\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} \right)^2 \right) - \frac{d^2\theta}{d\eta^2} = 0,$$

где $\mathbf{Pr} = \frac{\mu c}{\lambda}$.

ОДУ предназначено для определения функции θ .

Таким образом, для определения двух функций φ и θ получены два уравнения.

Теперь подставим граничные условия в автомодельных переменных. Для этого воспользуемся соотношениями и выражением для независимой автомодельной переменной η :

$$\eta = y \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{\mu x}} \quad (9)$$

Таким образом, в автомодельных переменных решение задачи сводится к решению краевой задачи для системы ОДУ с граничными условиями при $\eta = 0$ и при $\eta \rightarrow \infty$.

Для случая ньютоновской жидкости задача параметризована величинами: скоростью вдува/всасывания жидкости C и числом Прандтля \mathbf{Pr} . Аналитически поставленную задачу решить нельзя. Для ее решения необходимо применить численный метод, который представляет собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-ого порядка

Обсудим численное решение системы уравнения. ОДУ является ОДУ 3-го порядка относительно функции φ , а ОДУ 2-ого порядка относительно функции θ . Для численного интегрирования этих уравнений на полуинтервале $[0, \infty)$ необходимо наличие пяти начальных условий, а именно $\eta = 0$ необходимо знать

$$\varphi(0) = \varphi_{00}, \quad \left. \frac{d\varphi}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \varphi_{10}, \quad \left. \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} = \varphi_{20}, \quad \theta(0) = \theta_{00}, \quad \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \theta_{10}.$$

Для решения краевой задачи для системы был применен метод, представляющий собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-ого порядка. Блок-схема алгоритма решения приведена в соответствии с рисунком 2.

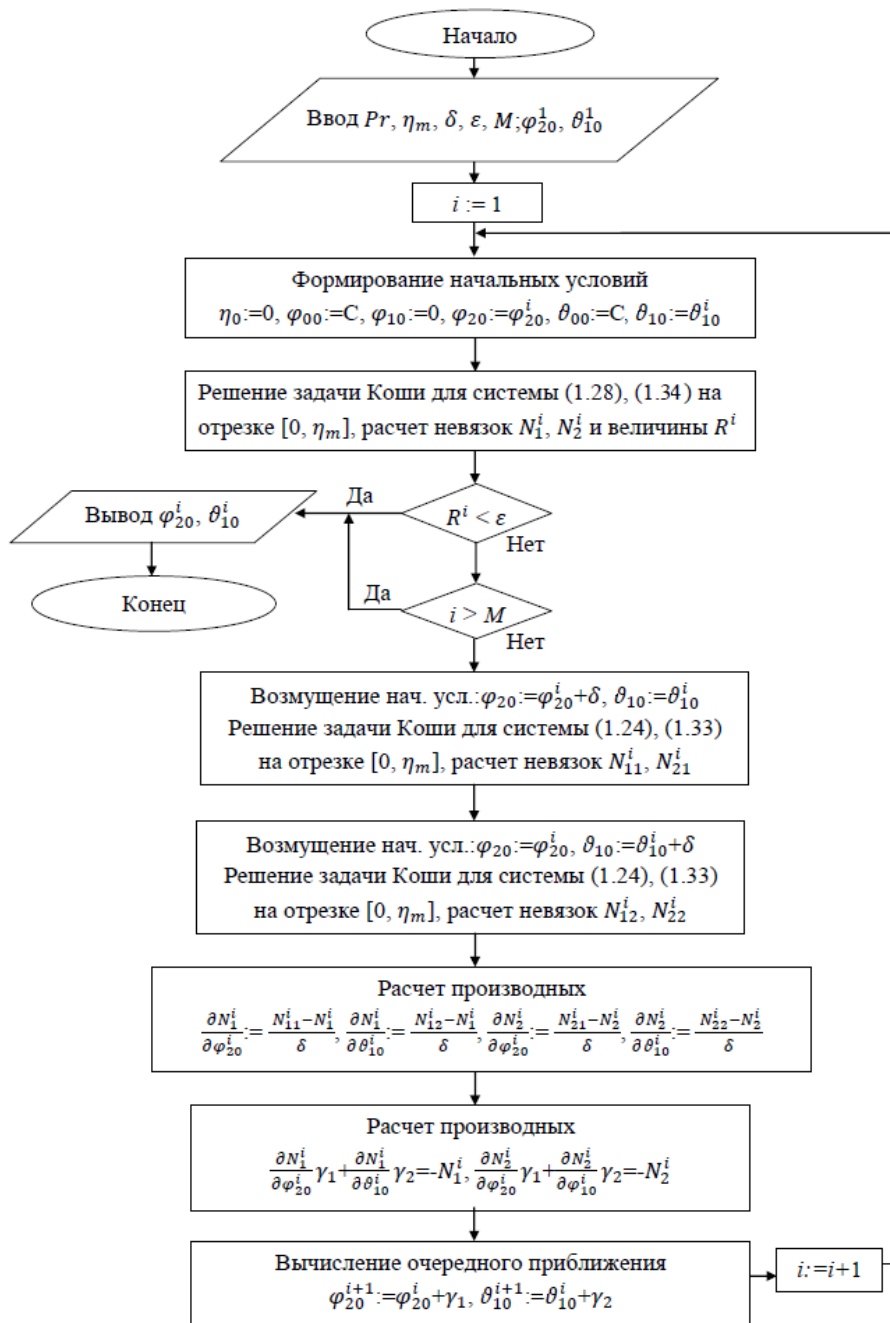


Рисунок 2 — Блок-схема алгоритма численного решения

В соответствии с рисунком 3 представление безразмерной продольной составляющей скорости частицы жидкости в пограничном слое. Характер изменения поперечной скорости не зависит от числа Прандтля, поэтому эти величины не фигурируют в уравнении и соответствующих ему граничных условиях. Продольная составляющая скорости монотонно возрастает от нуля на границе пластины, что соответствует условию прилипания жидкости, до единицы, что отвечает условию выравнивания, то есть на внешней границе слоя продольная составляющая скорости частиц жидкости совпадает со скоростью набегающего потока.

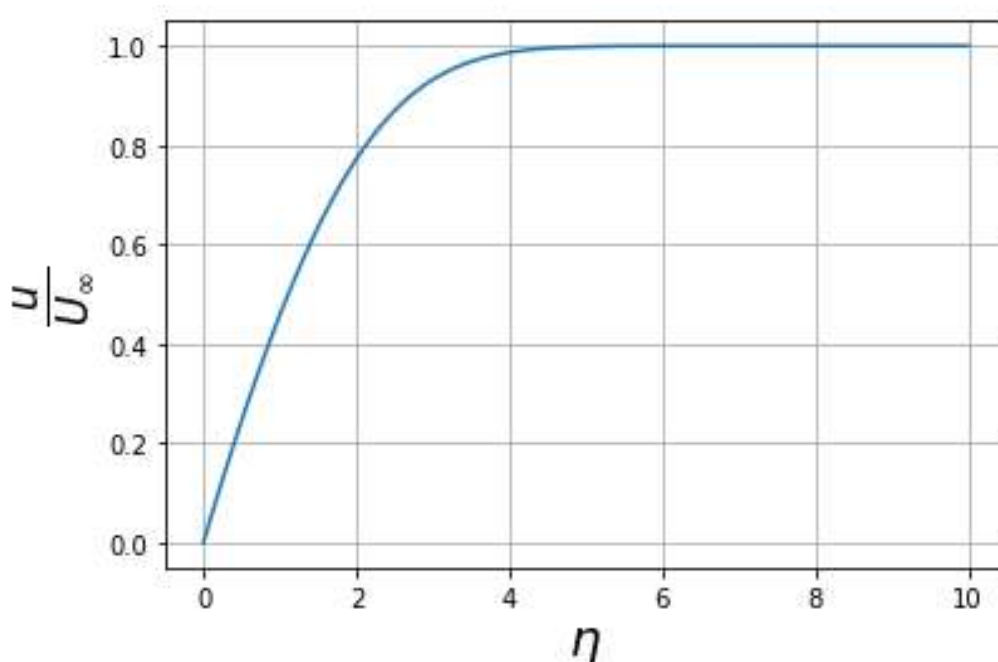


Рисунок 3 — График распределения продольной составляющей скорости

В соответствии с рисунком 4 характер изменения поперечной скорости не зависит от числа Прандтля. В поперечном направлении частицы жидкости движутся по направлению к телу. Причем, чем дальше частица находится от тела, тем больше величина поперечной скорости.

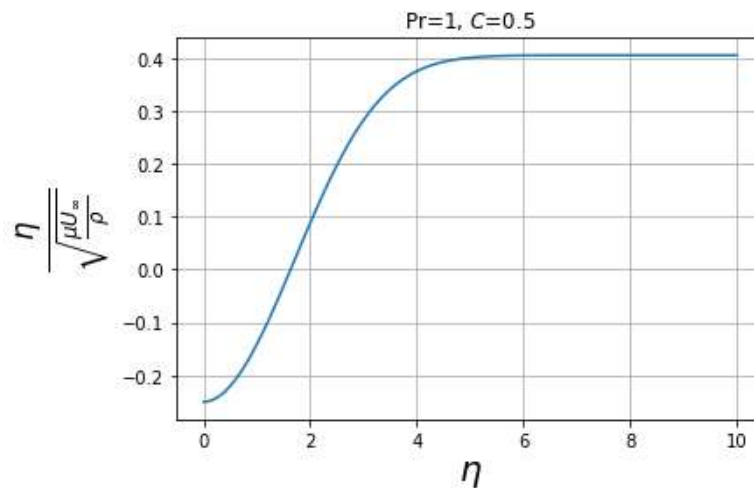


Рисунок 4 — График распределения поперечной составляющей скорости

В соответствии с рисунком 5 представлено распределение безразмерной температуры при различных значениях φ_{00} и различных значениях числа Прантля. Качественно характер изменения температуры не зависит от значений параметров: θ монотонно убывает от единицы на поверхности тела до нуля, что отвечает условию выравнивания, то есть на внешней границе температурного пограничного слоя температура частиц жидкости совпадает с температурой набегающего потока.

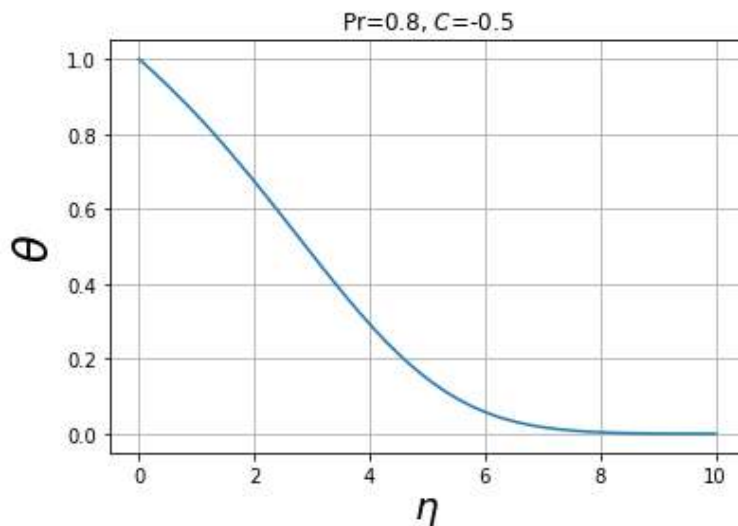


Рисунок 5 — Распределение температуры при $C=-0.5$, $Pr=0.8$

Случай неньютоновской жидкости

Данная задача решается по такому же алгоритму, что и задача с ньютоновской жидкостью В случае неньютоновской жидкости имеет систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu^* n \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (11)$$

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda^* m \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|^{m-1} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu^* \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (12)$$

В результате всех необходимых подстановок и преобразований получим автомодельные переменные

$$\psi = \left(\frac{\mu^*}{\rho} \cdot U_\infty^{2n-1} \cdot nx \right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \varphi(\eta), \quad \eta = y \left(\frac{\mu^*}{\rho} \cdot U_\infty^{n-2} \cdot nx \right)^{-\frac{1}{n+1}},$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) описывает поведение функции $\varphi(\eta)$ в области $0 \leq \eta < \infty$:

$$-\frac{1}{n+1} \cdot \varphi \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} = \left| \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} \right|^{n-1} \frac{d^3 \varphi}{d\eta^3} \quad (13)$$

ОДУ (14) предназначено для определения функции θ .

$$\mathbf{Pr} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \varphi + \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right|^{n-1} \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right)^2 \right) + \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \cdot \left| \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right|^{n-1} = 0 \quad (14)$$

где $\mathbf{Pr} = \frac{\lambda^*}{\mu^* c^n} \cdot U^{n-1}$.

Без учета тепла за счет вязкости уравнение (14) принимает вид

$$\mathbf{Pr} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \varphi \right) + \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \cdot \left| \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right|^{n-1} = 0 \quad (15)$$

Теперь подставим граничные условия в автомодельных переменных.

В соответствии с рисунком 6 представление безразмерной продольной составляющей скорости частицы жидкости в пограничном слое. Характер изменения поперечной скорости не зависит от числа Прантля, поэтому эти величины не фигурируют в уравнении (13) и соответствующих ему граничных условиях. Продольная составляющая скорости монотонно возрастает от нуля на границе пластины, что соответствует условию прилипания жидкости, до единицы, что отвечает условию выравнивания, то есть на внешней границе слоя продольная составляющая скорости частиц жидкости совпадает со скоростью набегающего потока.

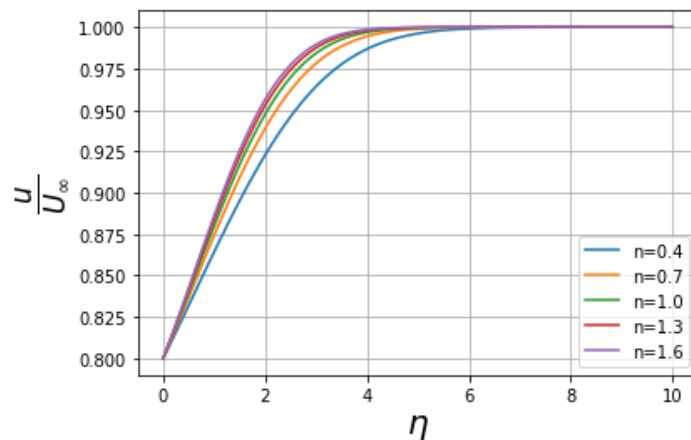


Рисунок 6 — График распределения продольной составляющей скорости

В поперечном направлении частицы жидкости движутся по направлению к телу. Причем, чем дальше частица находится от тела, тем больше величина v .

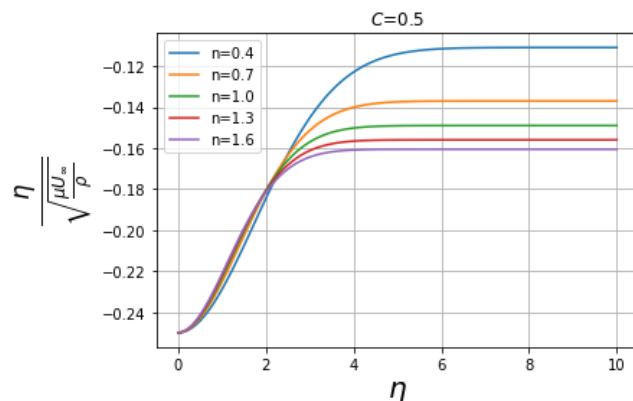


Рисунок 7 — График распределения поперечной составляющей скорости в случае всасывания

В соответствии с рисунком 8 представлено распределение безразмерной температуры, когда не учитывается работа силы вязкости при различных значениях C и различных значениях числа Прантля. В случаях с учетом и без учета тепла за счет работы сил вязкости толщина температурного ПС тем больше, чем меньше значение n и чем больше скорость вдува жидкости через поверхность пластины. Напомним, что отрицательное значение параметра C соответствует вдуву жидкости, а положительное – всасыванию.

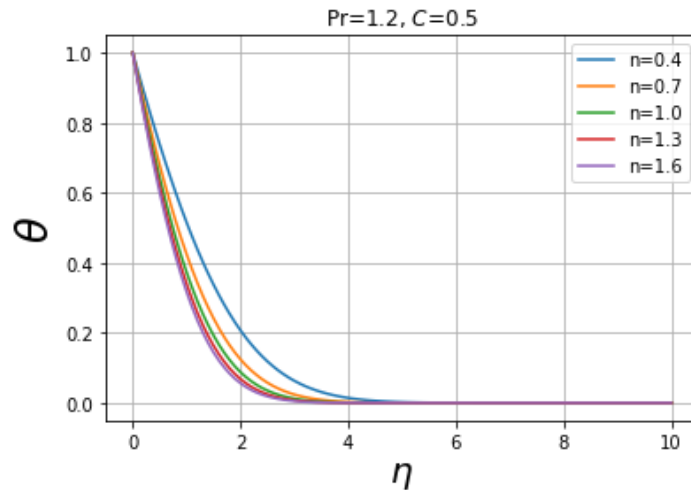


Рисунок 8 — Распределение температуры при $C=-0.5$, $Pr=1.2$

В соответствии рисунком 9 представлено распределение безразмерной температуры, когда не учитывается работа силы вязкости при различных значениях C и различных значениях числа Прантля.

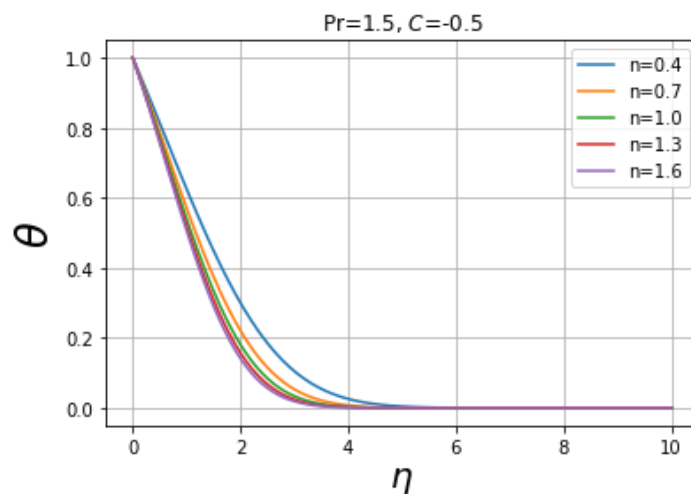


Рисунок 9 — Распределение температуры при $C=-0.5$, $Pr=1.5$

В соответствии с рисунком 10, представлено изменение $\varphi_{02} = \varphi_{02}(C)$ на отрезке $[-1,2]$.

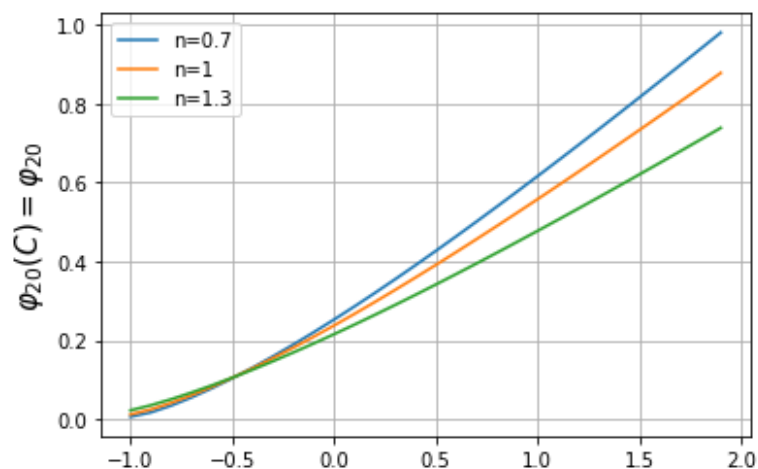


Рисунок 10 — Изменение $\varphi_{02} = \varphi_{02}(C)$

На рисунке 11 представлено изменение функции $\theta_{01} = \theta_{01}(C)$ на отрезке $[-1,2]$ с учетом тепла. А на рисунке 12 представлено изменение функции $\theta_{01} = \theta_{01}(C)$ без учета тепла.

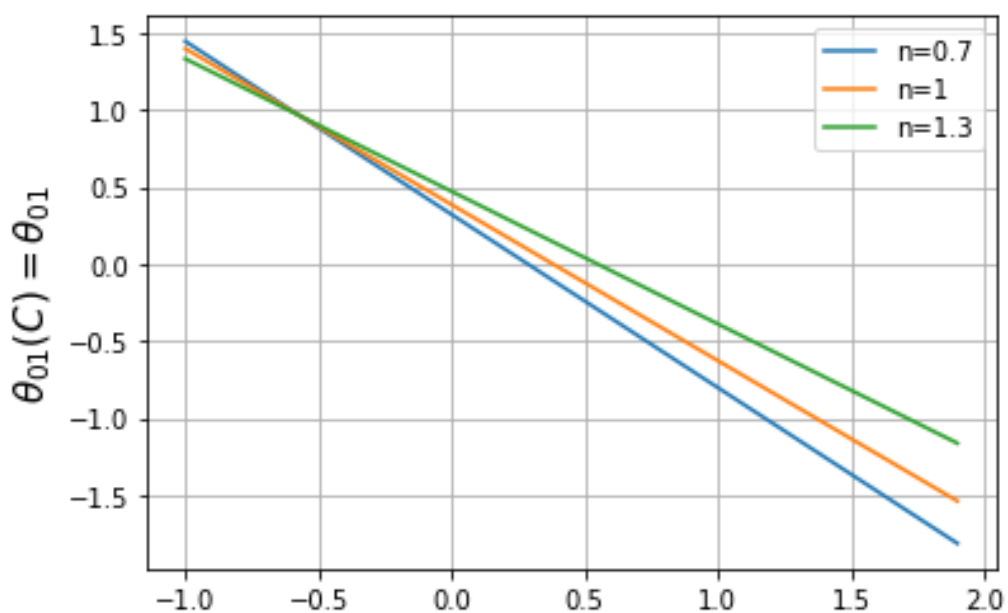


Рисунок 11 — изменение функции $\theta_{01} = \theta_{01}(C)$ с учетом тепла

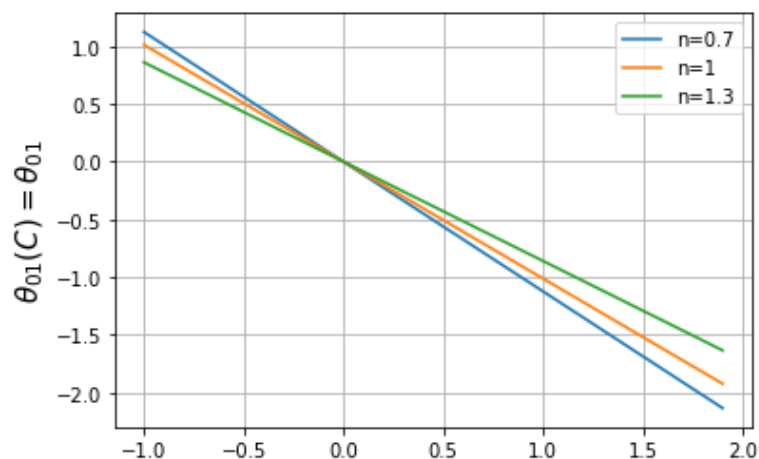


Рисунок 12 — изменение функции $\theta_{01} = \theta_{01}(C)$ без учета тепла

Заключение. Решена задача об обтекании тонкой проницаемой пластины потоком вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости как для случая ньютоновских, так и для случая неньютоновских сред. Эта задача является автомодельной.

Выполнен переход к автомодельной переменным и сформулирована краевая задача в автомодельных переменных. После ряда преобразований, решение задачи сводится к решению системы ОДУ для автомодельных представителей функции тока и температуры с граничными условиями на пластине и вдали от пластины. Задача параметризована четырьмя параметрами: скоростью вдува/всасывания, числом Прандтля, показателем n , характеризующим степенную неньютоновскую жидкость, а также переключателем, учитывающим влияние вязкости при расчете тепла.

Для решения задачи применен численный метод, представляющий собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-ого порядка.

Решение задачи представлено в виде графиков. Дана оценка распределений параметров в пограничном слое. Рассмотрено поведение неизвестных граничных условий на поверхности пластины при изменении параметра, характеризующего вдув/всасывание жидкости при фиксированных значениях остальных параметров.