МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики

«Смешанная задача для волнового уравнения с нулевым начальным положением»

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 411 группы

по направлению 01.03.02 - прикладная математика и информатика
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института

Шустова Дмитрия Алексеевича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
зав.кафедрой, д.ф-м.н, профессор ______________ А.П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
профессор, д.ф-м.н. ______________ А.П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2020

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Метод Фурье – один из важнейших математических методов. Впервые строгое обоснование метода Фурье смог дать академик В.А. Стеклов. Теорема Стеклова—одна из фундаментальных теорем математической физики и теории рядов Фурье.

Одно из важнейших применений теоремы Стеклова в теории дифференциальных уравнений в частных производных состоит в том, что она дает строгое математическое обоснование метода Фурье (разделения переменных) для решения смешанных краевых задач для уравнений гиперболического типа.

Однако при наличии преимуществ у данного метода есть существенный недостаток. Метод Фурье требует завышений гладкости начальных данных.

В ходе исследований по ускорению сходимости рядов Фурье А.Н. Крылов разработал прием, который сводит вопрос о дифференцировании ряда к изучению двух других рядов, которые получаются при помощи разбиения первого. Один из таких рядов точно суммируется, а второй сходится так быстро, что его можно дифференцировать почленно. Ко всему этому А.Н. Крылов смог преодолеть трудности, связанные с невозможностью почленного дифференцирования на ряде конкретных прикладных задач.

Используя прием А.Н. Крылова, а также асимптотику для собственных значений и собственных функций, В.А.Чернятин исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости.

В данной работе также используется резольвентный подход к методу Фурье, позволяющий найти решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения с ослабленными условиями гладкости без использования информации о собственных и присоединенных функциях соответствующей спектральной задачи. Данный подход хорошо изложен в работах А.П. Хромова, В.В. Корнева и М.Ш. Бурлуцкой[3],[4].

В данной работе исследуется смешанная задача для однородного волнового уравнения с закрепленными концами, суммируемым потенциалом и ненулевой начальной скоростью. Полученным методом Фурье классическое решение при минимальных условиях гладкости начальных данных и обобщенное решение в случае начальной скорости, представляющей собой произвольную суммируемую функцию[7].

Рассмотрим волновое уравнение:

$\partial 2u(x, t)$

$\partial t2 =$

$\partial 2u(x, t)$

$\partial x2$

$- q(x)u(x, t)$, $x \in [0, 1]$, $t \in [0,\infty)$, (1)

при следующих условиях:

$u(0, t) = u(1, t) = 0$, (2)

$u(x, 0) = 0$, u'

$t(x, 0) = \psi(x)$. (3)

Будем считать, что комплексная функция $q(x) \in L[0, 1]$. В данной работе исследуются вопросы сходимости формального решения, полученного методом Фурье, и устанавливаются связь суммы формального решения с решением задачи(1)-(3) в том числе и обобщенными.

Пусть функция $\psi(x)$ абсолютно непрерывна, $\psi'(x) \in L2[0, 1]$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Это минимальные требования для существования классического решения.

Под классическим решением будем понимать непрерывно дифференцируемую функцию $u(x, t)$, абсолютно непрерывную по x и t, для которой $ux(x, t)$ ($ut(x, t)$) абсолютно непрерывны по x (t) и выполняются (1)-(3) (уравнение (1) выполняется почти всюду).

Структура работы. Данная работа состоит из введения, основной части, заключения, списка использованных источников и приложения.

Основная часть включает в себя. Метод Фурье. История открытия ряда Фурье. Ряд Фурье для четных и нечетных функций. Схема метода Фурье. Идея Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье. Резольвентный подход. Исследование рядов $uj(x, t)$. Исследование ряда $u1(x, t)$. Исследование ряда $u5\ (x, t)$. Свойства функций $u3(x, t)$ и $u6(x, t)$. Исследование функции $u2\ (x, t)$. Исследование функции $u4\ (x, t)$. Получение классического решения. Обобщенное решение. Описание программы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Фурье. Ряд Фурье – это представление произвольной функции с периодом в виде ряда. В общем виде рядом Фурье называется разложение элемента по ортогональному базису. Разложение функции в ряд Фурье – хороший инструмент при решении разных задач, потому что обладает свойствами преобразования при дифференцировании, интегрировании, сдвиге функции по аргументу и свёртке функций. Данное преобразование имеет большое значение, поскольку с помощью него можно решать много практических задач. Рядами Фурье пользуются не только математики, но и специалисты других наук. Разложение функций в ряд Фурье – это математический прием, который можно наблюдать и в природе, если использовать прибор, чувствующий синусоидальные функции.

Преобразованием Фурье является функция, которая описывает фазу и амплитуду синусоид, определенной частоты. Это преобразование используют для решения уравнений, описывающих динамические процессы, которые возникают под действием энергии. Ряды Фурье решают задачу выделения постоянных составляющих в сложных колебательных сигналах.

Метод Фурье - один из распространенных и эффективных методов решения уравнений с частными производными. Этот метод часто встречается и под другими названиями: метод разделения переменных или метод собственных функций. Приводится схема Фурье.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовалась смешанная задача для однородного волнового уравнения с закрепленными концами, суммируемым потенциалом и ненулевой начальной скоростью. Не все из этих требований являются минимальными, но они более слабые, чем в известных результатах. Были найдены почти минимальные условия на начальную скорость, при которых смешанная задача имеет классическое решение. В работе получен алгоритм для нахождения обобщенного решения смешанная задача для однородного волнового уравнения с закрепленными концами, суммируемым потенциалом и ненулевой начальной скоростью. Данный алгоритм был реализован на языке программирования C++.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Хромов А.П., Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью/ А.П. Хромов М.: Журн.выч.матем. и матем. физ., 58:9, 2015, 1583-1596 с.

2. Хромов А.П., О сходимости формального решения по методу Фурье для волнового уравнения с суммируемым потенциалом/ А.П. Хромов М.: Журн.выч.матем. и матем. физ., 56:10, 2016, 1795-1809 с.

3. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П., Резольвентный подход для волнового уравнения/ М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов М.:Журн.выч.матем. и матем. физ., 55:2, 2015, 229-241 с.

4. Корнев В.В., Хромов А.П., Резольвентный подход к методу Фурье в одной смешанной задаче для волнового уравнения/ В.В Корнев, А.П. Хромов М.: Журн.выч.матем. и матем. физ., 55:4, 2015, 621-630 с.

5. Корнев В.В., Хромов А.П., Резольвентный подход к методу Фурье для волнового уравнения в несамосопряженном случае/ В.В Корнев, А.П. Хромов М.: Журн.выч.матем. и матем. физ., 55:7, 2015, 1156-1167 с.

6. Петровский, И. Г. Лекции по уравнениям с частными производными / И. Г. Петровский. М. : Издательство «ГОСТЕХИЗДАТ», 1953. 401 с.

7. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики/ А.Н. Крылов М. : Л., 1950, 368 с.

8. Ильин В.А., Мальков К.В., Моисеев Е.И Базисность системы корневых функций несамосопряженных операторов и интегрируемость ассоциированных представлением Лакса нелинейных эфолюционных уравнений/ В.А. Ильин, К.В. Мальков, Е.И. Моисеев М. :Дифференц.уравнения, 25:11, 1989, 1956-1970 с.

9. Ильин В.А., Моисеев Е.И Оптимизация уравнения на двух концах струны упругими граничными силами за любой достаточно большой промежуток времени/В.А. Ильин,Е.И. Моисеев М. :Дифференц. уравнения, 44:1, 2008, 89-110 с.

10. Ломов И.С. Формула среднего значения Е.И. Моисеева для дифференциальных операторов четного порядка с негладкими

коэффициентами/ И.С. Ломов М. :Дифференц. уравнения, 35:8, 1999, 1046-1057 с.

11. Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэтес П., Действительный анализ в задачах/ П.Л. Ульянов, А.Н. Бахвалов, М.И Дьяченко, К.С. Казарян, П. Сифуэтес М. : Физматлит, 2005, 416 с.

12. Эдварде Р., Ряды Фурье в современном изложении / Р. Эдварде М. : Мир, 1985, т.1, 273 с.

13. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление/Л.Э. Эльсгольц М. : 1969, 422 с.

14. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений/ И.Г. Петровский М. : 2009, 205 с.

15. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения/ Э.Л. Айнс М. : 1939.