

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической теории  
упругости и биомеханики

**Исследование распространения краевых волн в толстой пластине  
на основе экспериментальных данных**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Плешкова Владимира Николаевича

Научный руководитель  
профессор, д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_

подпись, дата

М.В. Вильде

Зав. кафедрой  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

подпись, дата

Л.Ю. Коссович

Саратов 2020

## **Введение**

Настоящая бакалаврская работа посвящена разработке методов исследования краевых волн в пластинах на основе экспериментальных измерений волнового поля, возбуждаемого источниками, расположенными вблизи края пластины.

**Актуальность темы.** Волны, распространяющиеся за счет действия упругих сил (упругие волны), находят широкое применение на практике как средство диагностики благодаря их свойствам, включающим в себя возможность распространения на большие расстояния и отражения от различного рода препятствий. Наиболее изученным типом таких волн являются волны Лэмба, которые используются как средство неразрушающего контроля, а также мониторинга состояния конструкции. С середины прошлого века активно развивается теория другого типа волн, бегущих по структуре – волн, распространяющихся вдоль края пластины или оболочки, или краевых волн. В отличие от волн Лэмба, краевые волны пока не нашли применения на практике, что можно объяснить отсутствием экспериментальных исследований, подтверждающих выводы теории. В последнее время появился ряд экспериментальных работ, посвященных краевым модам пластин. В связи с этим возникла задача развития методов обработки экспериментальных данных, подходящих для исследования данного типа волн.

**Целью** данной работы является разработка алгоритмов и программ для обработки экспериментальных данных, содержащих информацию о распространении краевых волн и волн Лэмба в толстой пластине.

**Задачами** выполняемой работы являются:

- 1) изучить основы теории упругих волн в пластинах и получить теоретические решения, описывающие дисперсию и нестационарное волновое поле краевой волны;
- 2) изучить натурный эксперимент, проведенный с помощью оптического вибromетра с лазерным источником излучения;

3) применить частотно-волночисловой анализ к реальным экспериментальным данным, разработать алгоритмы и программы для выделения индивидуальных волн из измеренного волнового поля;

4) провести сравнение теоретических решений с выделенным полем краевой волны.

**Материалами** исследования являются дисперсионные уравнения волн Лэмба и краевых волн, а также данные экспериментов на алюминиевой пластине, полученные с помощью лазерной виброметрии.

**Научная значимость** работы состоит в экспериментальном подтверждении существования краевых волн и правильности теоретических моделей, описывающих их распространение.

**Структура и объем работы.** Бакалаврская работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка используемых источников, включающего 22 наименования, и четырех приложений. Работа изложена на 40 листах машинописного текста, содержит 34 рисунка.

#### **Основное содержание работы**

Во введении описывается актуальность поставленной задачи, формулируется цель исследования и ставятся задачи.

*Первый раздел* состоит из трех подразделов. В нем представлена информация о теории упругих волн, распространяющихся в пластине. Изучены уравнения дисперсионных кривых и строятся их графики.

Волны Лэмба распространяются в пластинах со свободными от нагрузки поверхностями. Поведение этих волн в пластинах впервые было изучено Рэлеем [1] и Лэмбом [2]. С тех пор многие исследователи работают в этой области на протяжении многих лет. Данные волны можно разделить на симметричные моды  $S_i$  и антисимметричные моды  $A_i$  ( $i=0,1,\dots$ ), которые описываются уравнениями Рэля – Лэмба [2, 3, 4].

Краевые волны распространяются вдоль свободного края пластины или оболочки. Для построения дисперсионных кривых краевых волн следует решать краевую задачу для трехмерных уравнений теории упругости.

Трехмерную задачу о построении дисперсионной краевой волны можно свести к приближенной двумерной. На основе двумерной теории растяжения пластин в работе получено приближенное дисперсионное соотношение для симметричной краевой моды ( $ES_0$ ) в виде

$$\omega = c_{pl}k, \quad (1)$$

где  $k$  – волновое число, рад/м;

$\omega$  – круговая частота, Гц;

$c_{pl}$  – корень уравнения

$$\left(1 - \frac{c_{pl}^2}{2c_s^2}\right)^2 - \sqrt{1 - \frac{c_{pl}^2}{c_p^2}} \sqrt{1 - \frac{c_{pl}^2}{c_s^2}} = 0, \quad (2)$$

в котором  $c_p^2 = \frac{2\mu}{(1-\nu)\rho}$ ;

$c_s$  – скорость поперечных волн, м/с;

$\mu$  – модуль сдвига, Па;

$\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;

$\nu$  – коэффициент Пуассона.

Антисимметричная краевая мода ( $EA_0$ ) в первом приближении описывается уравнением

$$\omega^2 = \frac{2h^2\mu}{3\rho} \left(3\nu - 1 + 2\sqrt{(1-\nu)^2 + \nu^2}\right) k^4, \quad (3)$$

полученным в 1960 году Ю.К. Коненковым с использованием приближенной двумерной теории изгиба пластин [5].

Для описания нестационарного поля волны  $ES_0$  в работе решена задача о действии касательной нагрузки, приложенной на краю пластины и изменяющейся во времени по закону функции Хевисайда. Для выделения поля краевой волны использована асимптотическая модель, предложенная в работе [6].

Написана программа для построения графика теоретических дисперсионных кривых. На рисунке 1 представлен график зависимости волнового числа от частоты для теоретических дисперсионных кривых волн

Лэмба и краевых волн, возникающих в частотном диапазоне, соответствующем имеющимся экспериментальным данным. Расчеты выполнены при следующих параметрах алюминиевой пластины:  $h = 0,002425$  м,  $\rho = 2780$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0,33$ ,  $\mu = 26,7 \cdot 10^9$  Па ( $c_S = 3100$  м/с,  $c_L = 6150$  м/с). В данном диапазоне возможно возбуждение трех симметричных волн Лэмба  $S_i$  ( $i=0,1,2$ ), двух антисимметричных волн Лэмба  $A_i$  ( $i=0,1$ ), а также симметричной и антисимметричной краевых волн  $ES_0$  и  $EA_0$ . Дисперсионная кривая последней мало отличается от дисперсионной кривой волны Лэмба  $A_0$ .

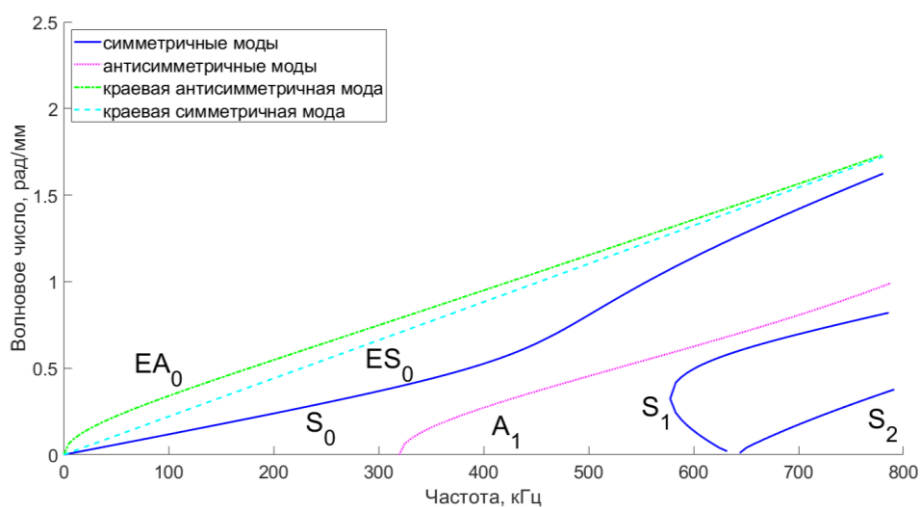


Рисунок 1 – Теоретические графики зависимости волнового числа от частоты

*Второй раздел* посвящен описанию экспериментальной установки и методу получения экспериментальных данных.

Эксперименты проводились на алюминиевой пластине толщиной 4,85 мм, длиной 600 мм, шириной 400 мм. На рисунке 2 схематично представлена экспериментальная установка. Упругие волны возбуждались пьезоупругим актуатором, приклеенным к поверхности исследуемой области пластины. С помощью функционального генератора создавались волны произвольной формы. Для получения данных о волнах использовался оптический виброметр с лазерным источником излучения (может регистрировать движение в диапазоне частот до 2,5 МГц). На основе эффекта Доплера были получены значения скорости перемещения частиц пластины в направлении нормали к поверхности, для которых будет проводиться частотно-волночисловой анализ [4, 7].

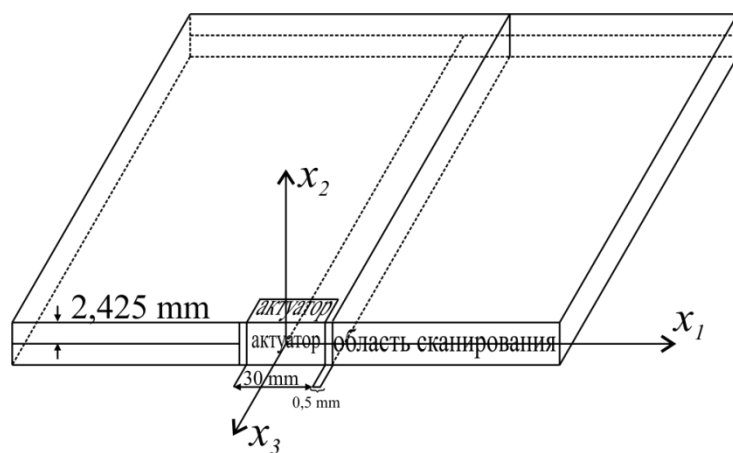


Рисунок 2 – Схематичное представление экспериментальной установки

В работе рассмотрены имеющиеся данные нескольких экспериментов, в которых областью сканирования был торец. Эксперименты можно разделить на две группы: когда актуатор находился на поверхности (эксперимент 1) и когда актуатор находился на торце (эксперименты 2-4). К актуаторам прикладывалась импульсная нагрузка, изменяющаяся по разному закону, в зависимости от эксперимента.

В первом эксперименте к актуатору прикладывалась нагрузка в форме прямоугольного импульса в 70 вольт длительностью 8 микросекунд, во втором эксперименте прикладывалась нагрузка в форме прямоугольного импульса в 70 вольт длительностью 5 микросекунд. В третьем и четвертом экспериментах импульсная нагрузка была приложена по формуле тонального импульса с 5 циклами, где для третьего эксперимента частота сигнала составила 100 кГц, а для четвертого эксперимента – 300 кГц.

Скан торца представляет собой набор данных, полученных путем сканирования вдоль ряда линий  $x_2 = const$ . С помощью программного обеспечения от компании Polytec, специализирующейся на виброметрии, результаты экспериментов с виброметра были записаны в специальные файлы с расширением .svd. Для доступа к информации и данным этих файлов использовалась библиотека программного обеспечения FileAccess от Polytec, также данные можно визуализировать с помощью программы ScanViewer от

Polytec [7]. Написана программа, с помощью которой извлекаются данные из .svd файла.

*Третий раздел* состоит из четырех подразделов. В нем получено теоретическое решение для нагрузки в форме прямоугольного импульса, теоретическое решение из статьи [8] используется для нагрузки по формуле тонального импульса. Далее частотно-волночисловой анализ применяется к экспериментальным данным, описывается метод выделения определенных волновых мод, анализируются полученные результаты. Написана программа, которая реализует двумерное прямое преобразования Фурье, затем выделяет из спектра определенную волну и реализует двумерное обратное преобразование Фурье.

Частотно-волночисловой анализ – это эффективное средство идентификации типа волн и анализа распространения этих волн.

Преобразование Фурье разлагает любую функцию на сумму синусоидальных базисных функций. Иными словами, преобразование Фурье – это способ рассматривать любую функцию как сумму простых синусоид [9].

Частотно-волночисловое представление  $U(f,k)$  пространственно-временных данных  $u(x,t)$  можно получить из двумерного преобразования Фурье следующим образом:

$$U(f, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i(2\pi ft - kx)} dt dx, \quad (4)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(f, k) e^{i(2\pi ft - kx)} df dk. \quad (5)$$

Выражение (4) называется прямым двумерным преобразованием Фурье, (5) – обратным двумерным преобразованием. Эти уравнения определяют спектр пространственных частот в сигнале  $u(x, t)$ .

Из эксперимента был получен массив  $u^{\text{exp}}(x_i, t_j)$  – экспериментальный сигнал, измеренный в точках  $x_i$ ,  $i = \overline{0..N}$  в моменты времени  $t_j$ ,  $j = \overline{0..M}$ .

Частотно-волночисловое представление этого сигнала определяется по формуле

$$U(f, k) = \int_{x_0}^{x_N} \int_{t_0}^{t_M} u^{\text{exp}}(x, t) e^{-i(2\pi ft - kx)} dt dx. \quad (6)$$

Анализ контурных графиков модуля величины  $U(f, k)$ , вычисленной по формуле (6), позволяет выяснить, из каких волн складывается волновое поле, наблюдаемое в эксперименте.

На рисунке 3 (а) представлен контурный график измеренного волнового поля актуатором для эксперимента 1.

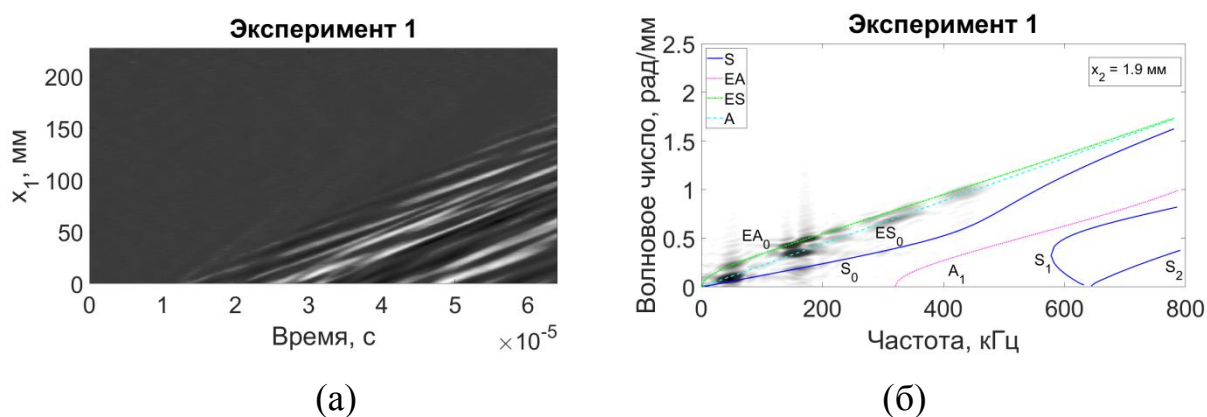


Рисунок 3 – Волновое поле для эксперимента 1: (а) измеренное, (б) частотно-волночисловой спектр при  $x_2=1.9$  мм

Как видно из рисунка 3 (б), волновое поле эксперимента 1 состоит из антисимметричной краевой волны ( $EA_0$ ), симметричной краевой волны ( $ES_0$ ) и симметричной волны Лэмба ( $S_0$ ).

Аналогичные исследования были проведены для экспериментов 2-4. В волновом поле эксперимента 4 доминирует симметричная краевая волна ( $ES_0$ ). Волновое поле эксперимента 3 состоит из симметричной краевой волны ( $ES_0$ ) и симметричной волны Лэмба ( $S_0$ ). Наибольший вклад в волновом поле эксперимента 4 вносит волна  $ES_0$ , по сравнению с ней, вклад остальных волн практически не заметен.



Частотно-волночисловой спектр можно разложить по индивидуальным модам [10]. Для этого нужно использовать двумерный полосовой фильтр, который математически выражается следующей формулой [4, 11]:

$$W(f, k) = w_f(f)w_k(f, k), \quad (7)$$

где  $w_f(f)$  – фильтр с характеристикой типа «приподнятый косинус», в который входит параметр  $\beta$  – коэффициент сглаживания;

$w_k(f, k)$  – двумерный фильтр, который центрирован на теоретической дисперсионной кривой, в который входит параметр  $D_{wk}$  – ширина полосы волнового числа.

Тогда, применяя частотно-волночисловую фильтрацию к спектрам, например, для эксперимента 1, можно получить следующие индивидуальные моды, представленные на рисунке 4.

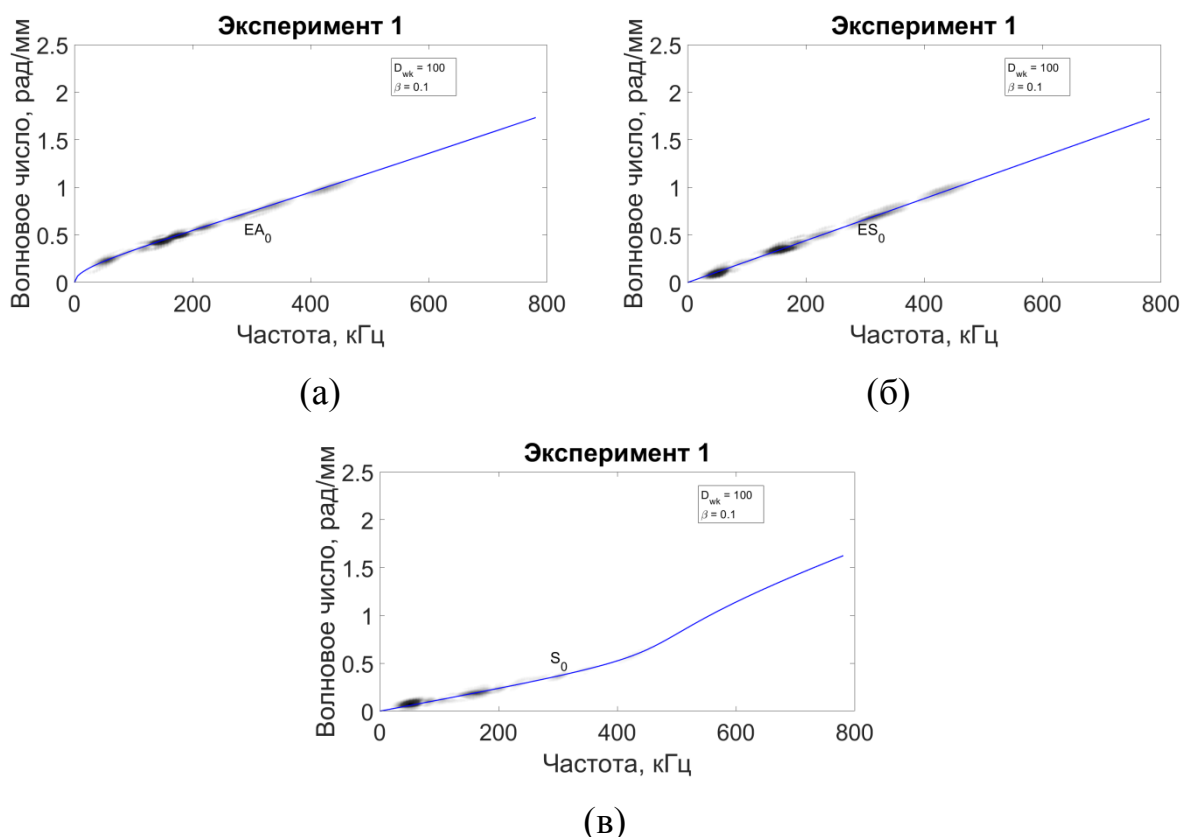


Рисунок 4 – Выделенная волна для эксперимента 1: (а)  $EA_0$ , (б)  $ES_0$ , (в)  $S_0$

Для проверки корректности работы фильтров сложим спектры выделенных волн, как представлено на рисунке 5 (а). После этого применим

обратное двумерное преобразование Фурье и получим волновое поле с суммарным вкладом волн  $EA_0$ ,  $ES_0$ ,  $S_0$ , как представлено на рисунке 5 (б).

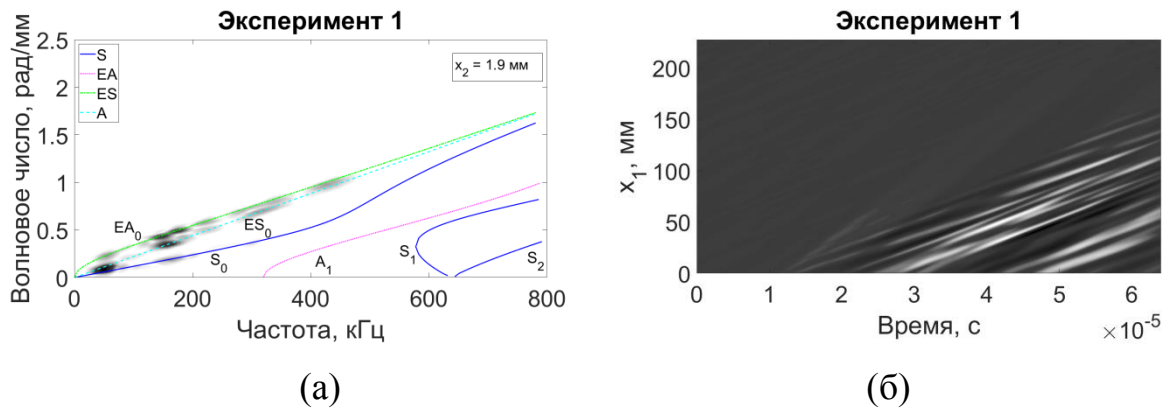


Рисунок 5 – Для эксперимента 1: (а) частотно-волночисловой спектр после применения фильтра с вкладом волн  $EA_0$ ,  $ES_0$ ,  $S_0$ , (б) Волновое поле после применения фильтра с вкладом волн  $EA_0$ ,  $ES_0$ ,  $S_0$

Сравнивая рисунок 5 (б) и рисунок 3 (а), можно убедиться, что исходное волновое поле действительно представляет собой сумму полей трех выделенных волн. Для более точного сравнения полученных результатов был построен график зависимости скорости частиц от времени, как представлено на рисунке 6.

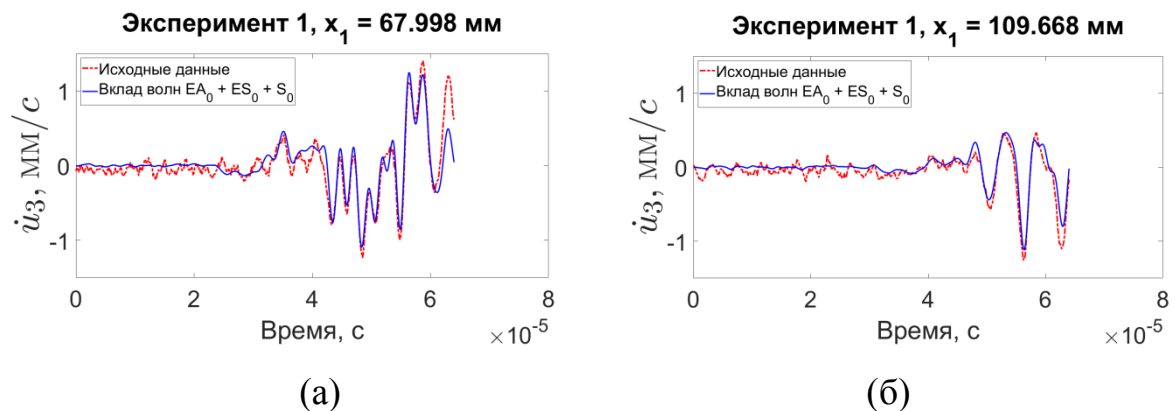


Рисунок 6 – Сравнение измеренного сигнала с суммарным вкладом волн  $EA_0$ ,  $ES_0$ ,  $S_0$ , выделенных с помощью фильтра для эксперимента 1 при  $x_1 =$  (а) 68 мм, (б) 110 мм

Из рисунка 6 видно, что графики почти совпали, несовпадение можно объяснить влиянием шума в экспериментальном сигнале.

Аналогичные исследования были проведены для экспериментов 2-4. В эксперименте 2 спектре наблюдается только волна  $ES_0$ . Из эксперимента 3 после применения фильтра можно получить волновое поле с вкладом волн  $ES_0$ ,  $S_0$ , в эксперименте 4 доминирует вклад волны  $ES_0$ .

Для сравнения результатов, полученных путем эксперимента с теоретическими результатами написаны программы на языке программирования MATLAB, которые реализуют построение теоретического графика зависимости скорости частиц от времени для волны  $ES_0$  и наложение их на поле волны  $ES_0$ , полученное экспериментальным путем.

Сравнивая теоретическое решение, например, с экспериментом 3, можно получить следующие графики, представленные на рисунке 7.

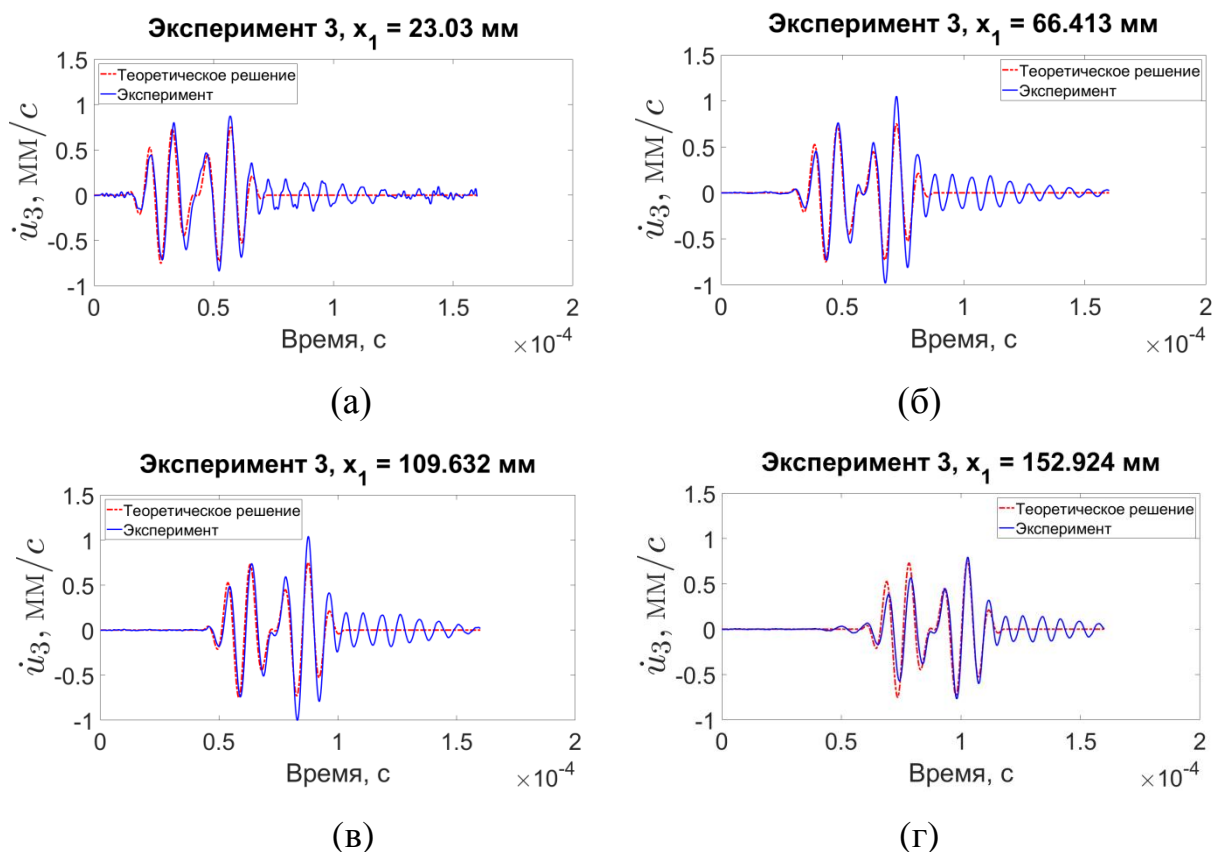


Рисунок 7 – Сравнение теоретического решения с волной  $ES_0$ , полученной экспериментальным путем для эксперимента 3 при  $x_1 =$  (а) 23 мм, (б) 66 мм, (в) 109 мм, (г) 153 мм

Анализируя рисунок 7, можно сделать вывод, что эксперимент почти совпадает с теоретическим решением, несовпадение можно объяснить тем, что в теоретическом решении не учитываются собственные колебания актуатора.

Аналогичные сравнения теоретического решения были проведены с экспериментами 1, 2 и 4. Сравнение с экспериментом 1 в начальной части сигнал совпадает, а затем решение расходится. Из сравнения с экспериментом 2 пики теоретического решения и эксперимента совпадают. При сравнении с экспериментом 4 на начальном этапе эксперимент хорошо согласуется с теоретическим решением, однако далее заметно значительное возбуждение резонансных колебаний актуатора.

### **Заключение**

В ходе выполнения работы были изучены основы теории волн Лэмба и краевых волн в пластинах, выведено дисперсионное уравнение для симметричной краевой волны в низкочастотном диапазоне и получено решение нестационарной задачи, описывающее вклад краевой волны.

Разработаны методы обработки экспериментальных данных, основанные на применении методов частотно-волночислового анализа и частотно-волночисловой фильтрации. Исследованы волны, возникающие в пластине при действии актуатора, приклеенного вблизи края на поверхности пластины или на торце. В результате показано, что основной вклад в возбуждаемое волновое поле вносят краевые волны. Частотно-волночисловая фильтрация была использована для выделения индивидуальных волн из общего волнового поля. Вклад симметричной краевой волны был сопоставлен с теоретическим решением, полученным на основе двумерной теории пластин, при этом выявлено достаточно хорошее согласование теории и эксперимента

Автор выражает благодарность сотрудникам Института математики, механики и информатики Кубанского государственного университета Голубу М. В. и Еремину А. А. за предоставленные экспериментальные данные.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Rayleigh, J. On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter / J. Rayleigh // Proc. Lond. Math. Soc. – 1888/1889. – V. 20, №. 357. – P. 225-234.
- 2 Lamb, H. On waves in elastic plate / H. Lamb // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A. – 1917. – V. 93, №. 648. – P. 114-128.
- 3 Rose, J. Waves in Plates / J. Rose // Ultrasonic Guided Waves in Solid Media. – Cambridge : Cambridge University Press, 2014. – Chap. 6. – P. 76-106.
- 4 Tian, Z. Lamb wave frequency–wavenumber analysis and decomposition / Z. Tian, L. Yu // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2014. – V. 25, №. 9. – P. 1107-1123.
- 5 Коненков, Ю. К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа / Ю. К. Коненков // Акуст. Журн. – 1960. – Т. 6, Вып. 1. – С. 124-126.
- 6 Kaplunov, J. Explicit models for elastic and piezoelastic surface waves / J. Kaplunov, A. Zakharov, D. Prikazchikov // IMA Journal of Applied Mathematics. – 2006. – V. 71, №. 5. – P. 768-782.
- 7 Neumann, M. Structural Health Monitoring Using Lamb Wave Testing / M. Neumann, R. Lammering, J. Schell, R. Behrendt. – Hamburg : Polytec GmbH, 2017. – 12 p.
- 8 Wilde, M. V. Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate / M. V. Wilde, M. V. Golub, A. A. Eremin // Journal of Sound and Vibration. – 2019. – V. 441. – P. 26-49.
- 9 Пономарев, Ю. В. Введение в спектральный, корреляционный и вейвлет-анализ / Ю. В. Пономарев. – М. : Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2012. – 284 с.
- 10 Ruzzene, M. Frequency-wavenumber domain filtering for improved damage visualization / M. Ruzzene // Smart Materials and Structures. – 2007. – V. 16, №. 6. – P. 2116-2129.
- 11 Wilde, M. V. Experimental observation of theoretically predicted spectrum of edge waves in a thick elastic plate with facets / M. V. Wilde, M. V. Golub, A. A. Eremin // Ultrasonics. – 2019. – V. 98. – P. 88-93.