МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

Применение модели пороупругой оболочки для описания распространения волны давления в кровеносном сосуде

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Чухаревой Алины Вадимовны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н. ________________ М.В. Вильде
подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ________________ Л.Ю. Коссович
подпись, дата

Саратов 2020

Введение

В данной работе изучается влияние пороупругости стенки на распространение волны давления в кровеносном сосуде. Материал оболочки кровеносного сосуда считается состоящим из двух фаз – твёрдого пористого каркаса и жидкости, заполняющей поры. Поставленная задача представляет интерес, поскольку используемые в работе рассуждения основаны на теории двухфазных сред, в то время как для описания механического поведения биологических объектов используют, в основном, однородные модели.

В работах, посвященных изучению процесса распространения упругих волн, основное внимание уделяется распространению волны давления, определяющей пульсацию крови в сосудах (см., например, [1–3]). Кровеносный сосуд с точки зрения механики рассматривается как упругая оболочка, заполненная жидкостью. При описании распространения пульсовой волны часто применяются линеаризованные теории. Чаще всего упругое поведение оболочки сосуда описывается безмоментной теорией оболочек и учитывается предварительное натяжение.

Актуальность темы заключается в необходимости детального изучения механического поведения кровеносных сосудов с учетом специфики биологических тканей для развития методов диагностики и лечения сердечно-сосудистых заболеваний.

Научная значимость работы заключается в оценке вклада движения поровой жидкости в коэффициент затухания волны давления.

Целью данной работы является описание механического поведения кровеносного сосуда на основе теории пороупругих сред с последующим сравнением с теорией упругих сред.

Задачами выполняемой работы являются:

1) изучение математической модели гетерогенной среды, состоящей из твердого скелета, заполненного жидкостью;

2) построение теории поропругих тонких оболочек путем включения в теорию упругих тонких оболочек теории Био и теории фильтрации Дарси;
3) вывод дисперсионного уравнения для частного случая цилиндрической оболочки;
4) численное решение дисперсионного уравнения с использованием результатов натурного эксперимента.

Материалами исследования являются уравнения теории упругости тонких оболочек, предложенной В. В. Новожиловом [4], теория пороупругости, предложенная бельгийско-американским учёным Морисом Энтони Био [5-7] и теория фильтрации Дарси, а также данные экспериментов по растяжению образцов тканей стенки сосуда.

Структура и объём работы. Работа состоит из введения, 4 разделов, заключения и списка используемых источников, включающего 27 наименований. Работа изложена на 54 листах машинного текста, содержит 7 рисунков, 2 таблицы.

Основное содержание работы

Во введении описывается актуальность поставленной задачи, приводится обзор возникновения и применения теории пороупругих сред, формируется цель исследования и ставятся задачи.

Первый раздел состоит из пяти подразделов. Он посвящен описанию и построению математической модели пороупругой среды.

В *первом подразделе* вводятся основные характеристики гетерогенной среды: элементарный представительный объем двухфазного материала, пористость, полная эффективная плотность и радиус-вектор масс [8].

Изученная теория пороупругости рассматривает условные плотности каждой фазы в точках эффективной среды как массы соответствующих фаз, отнесенные ко всему объему рассматриваемого представительного элемента.

Во *втором подразделе* рассматриваются кинематические переменные гетерогенной среды.

Кинематические параметры гетерогенной среды представляют собой перемещения и скорости точек твердого каркаса и жидкой фазы, осредненные по соответствующим объемам.

Вводятся векторы перемещения твердой и жидкой фаз, отнесенные к центру масс элементарного представительного объема двухфазной среды. Определяются условные перемещения и полный вектор перемещений через усреднение перемещений на микроуровне по объему. Определяется перемещение жидкости в порах относительно твердого каркаса или диффузионное перемещение жидкости в порах.

Тензор малых деформаций эффективной пороупругой среды вводится путем осреднения деформаций, возникающих на микроуровне, и выражается через сумму эффективных тензоров деформации твёрдой и жидкой фаз с соответствующими коэффициентами пористости.

В *третьем подразделе* рассматриваются силовые переменные пороупругой среды.

К силовым переменным относятся полный тензор напряжений, полная интенсивность распределённых сил на поверхности представительного элемента, а также полная интенсивность объемных сил.

В рассматриваемой теории полные тензоры, характеризующие эффективные свойства материала, получаются путём сложения условных тензоров, отнесенных к соответствующим фазам.

В *четвертом подразделе* выводятся основные соотношения пороупругого материала или уравнения состояния среды.

Для описания механического вклада и поведения жидкости в порах были приняты некоторые допущения. Первое допущение состоит в том, что диссипативные свойства жидкости учитываются только косвенным путем в уравнениях равновесия через силы вязкого трения, пропорциональные вязкости материала и скорости фаз друг относительно друга. Второе предполагает использование модели сжимаемого тела для описания упругого поведения жидкой фазы.

Рассматривается анизотропная линейная модель гетерогенной среды, в которую входят феноменологические коэффициенты – тензор коэффициентов взаимности, которые определяют влияние деформаций одной фазы на ответные напряжения в другой фазе.

Путем математических преобразований из введенных ранее соотношений получена система из двух уравнений, являющихся определяющими соотношениями пористого материала. Другими словами, получены уравнения состояния среды.

В *пятом подразделе* рассматривается движение среды в переменных давление-перемещение. Уравнения движения в переменных давление-перемещение получены в общем случае с учётом инерционных и диссипативных характеристик пороупругого материала на основе уравнений движения элемента гетерогенной среды.

Второй раздел состоит из двух подразделов. Он посвящен построению теории пороупругих тонких оболочек на основе объединения теории упругих тонких оболочек Новожилова и теории Мориса Энтони Био.

В *первом подразделе* рассматривается оболочка постоянной толщины, края которой совпадают с линиями кривизны. Оболочка считается тонкой, а моментами, возникающими в ней, пренебрегаем, сводя тем самым теорию к безмоментной.

Положение точек срединной поверхности определяем криволинейными координатами, которые являются линиями главной кривизны срединной поверхности.

Для описания модели вводим радиус-вектор, определяющий положение точки срединной поверхности, параметры Ламе, базисные вектора и вектор перемещения точки на срединной поверхности.

На основе введенных параметров и пользуясь теорией Новожилова определяем деформации срединной поверхности.

В теории оболочек имеют дело не с напряжениями, возникающими в поперечных сечениях оболочки, а с величинами, статически эквивалентными им – усилиями и моментами. В данной работе рассматривается безмоментная теория оболочек. Для перехода от напряжений к усилиям рассмотрен малый элемент оболочки и введены интегральные характеристики: продольные и сдвигающие усилия. На основе введенных усилий и параметров, описывающих перемещения точек срединной поверхности, записаны уравнения равновесия оболочки. С целью рассмотрения задачи о динамическом деформировании оболочки, к полученным уравнениям равновесия были добавлены силы инерции в соответствии с принципом Даламбера. В результате были получены уравнения движения оболочки.

Материал оболочки считается подчиняющимся закону Гука. На основании второй гипотезы Кирхгофа нормальные напряжения, действующие на площадках, касательных к срединной поверхности, равны нулю. После подстановки выражений для напряжений во введенные определения сдвигающих, нормальных и продольных усилий, получены соотношения для усилий и деформаций, которые называются уравнениями состояния оболочки.

Полученные системы уравнений полностью описывают модель движения и деформации тонкой упругой оболочки.

Второй подраздел посвящен переходу от теории упругих тонких оболочек к теории пороупругих тонких цилиндрических оболочек.

Рассмотрение проводится для частного случая цилиндрической оболочки.

Уравнения движения оболочки, выведенные в *первом подразделе,* считаются справедливыми для пористой оболочки. Уравнения состояния следует модифицировать с учетом воздействия жидкой фазы. Последнее учитывается в виде слагаемого, пропорционального давлению жидкости в порах и тензору Био.

Аналогично случаю упругой оболочки, получены уравнения состояния пороупругой оболочки:

$$T_1 = \frac{E_{dr}h}{1-\nu_{dr}{}^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\nu}{R}u_3\right) - A_0\frac{1-2\nu_{dr}}{1-\nu_{dr}}P_{\mathrm{v}}h,$$
$$T_2 = \frac{E_{dr}h}{1-\nu_{dr}{}^2}\left(\frac{1}{R}u_3 + \nu\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - A_0\frac{1-2\nu_{dr}}{1-\nu_{dr}}P_{\mathrm{v}}h. \tag{1}$$

где T_1, T_2 – продольные усилия, связанные с полными напряжениями;

E_{dr} – модуль Юнга дренированного элемента оболочки;

ν_{dr} – коэффициент Пуассона дренированного элемента оболочки;

h – толщина оболочки;

R – радиус срединной поверхности оболочки;

u_1, u_2 – перемещения в продольном и окружном направлениях;

x – координата вдоль оси цилиндрической оболочки;

A_0 – коэффициент Био;

P_{v} – среднее по толщине оболочки давление жидкости в порах.

Для замкнутой системы уравнений не хватает уравнения для давления P_{v}. Примем, что стенки сосуда являются непроницаемыми. Путем усреднения уравнения, описывающего динамическое распределение давления жидкости, получаем уравнение

$$K\frac{\partial^2 P_{\mathrm{v}}}{\partial x^2} - \left(\frac{\phi^2}{R_f} + A_0^2\frac{(1-2\nu_{dr})(1+\nu_{dr})}{E(1-\nu_{dr})}\right)\dot{P}_{\mathrm{v}} -$$
$$- A_0\frac{1-2\nu_{dr}}{1-\nu_{dr}}\left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x} + \frac{1}{R}\dot{u}_3\right) = 0. \tag{2}$$

где ϕ – пористость материала;

R_f – гидростатическая постоянная;

K – физический коэффициент проницаемости.

Точкой обозначено дифференцирование по времени.

Уравнения (1) и (2) вместе с уравнениями движения и выражениями деформации через перемещения составляют полную систему уравнений безмоментной теории пороупругих оболочек.

Третий раздел посвящен определению параметров пороупругой модели на основе эксперимента по одноосному растяжению образца стенки сосуда. Этот раздел состоит из трех подразделов. В *первом подразделе* описана методика проведения эксперимента. Во *втором подразделе* построена одномерная модель, описывающая одноосное растяжение образца. В *третьем подразделе* результаты расчетов по одномерной модели сравниваются с результатами эксперимента. Подбираются значения упругих модулей и коэффициента проницаемости, позволяющие наилучшим образом аппроксимировать площадь петли гистерезиса, наблюдаемую в эксперименте.

В *четвертом разделе* описан вывод дисперсионных уравнений и численный эксперимент.

В *первом подразделе* формулируется постановка задачи о колебаниях упругой оболочки, заполненной жидкостью. К уравнениям, выведенным ранее, добавляются уравнения Навье-Стокса, уравнение неразрывности и граничные условия прилипания на границе между жидкостью и стенкой сосуда. Решение поставленной задачи ищется в виде

$$X = X_0 \exp\left[i\left(\omega t - \chi x\right)\right], \tag{3}$$

где ω и χ – круговая частота и волновое число, соответственно;

X – любая из искомых величин;

t – переменная времени.

Уравнения Навье-Стокса после замены (3) примут вид уравнений Бесселя, решение которых записывается через функции Бесселя.

Согласно представлению (3) были построены частные решения для каждой волновой гармоники. Решение сведено к однородной системе из четырех линейных алгебраических уравнений относительно констант.

Дисперсионное уравнение представлено в виде

$$\det(\mathbf{D}) = 0, \tag{4}$$

где **D** – матрица размерности 4×4, коэффициенты которой зависят от ω и χ. Уравнение (4) решено в пакете Mathcad относительно χ при заданных ω.

Во *втором подразделе* по аналогии с упругой оболочкой записана постановка задачи для пороупругой оболочки, заполненной жидкостью, и выведено дисперсионное уравнение, которое также решено в пакете Mathcad.

В *третьем подразделе* приводятся результаты численных расчетов и анализируется влияние пороупругости стенки. Значения параметров задачи для расчетов были выбраны на основе механических параметров сосуда, взятых из источника [3], и порупругих параметров мышечной ткани, приведенных в [8]. При этом использовались значения упругих модулей и коэффициента проницаемости, определенные путем аппроксимации данных натурного эксперимента в разделе 3. Пример полученных результатов для сосудов с эффективным модулем Юнга $E_1 = 1.1$ МПа представлен на рисунке 1.

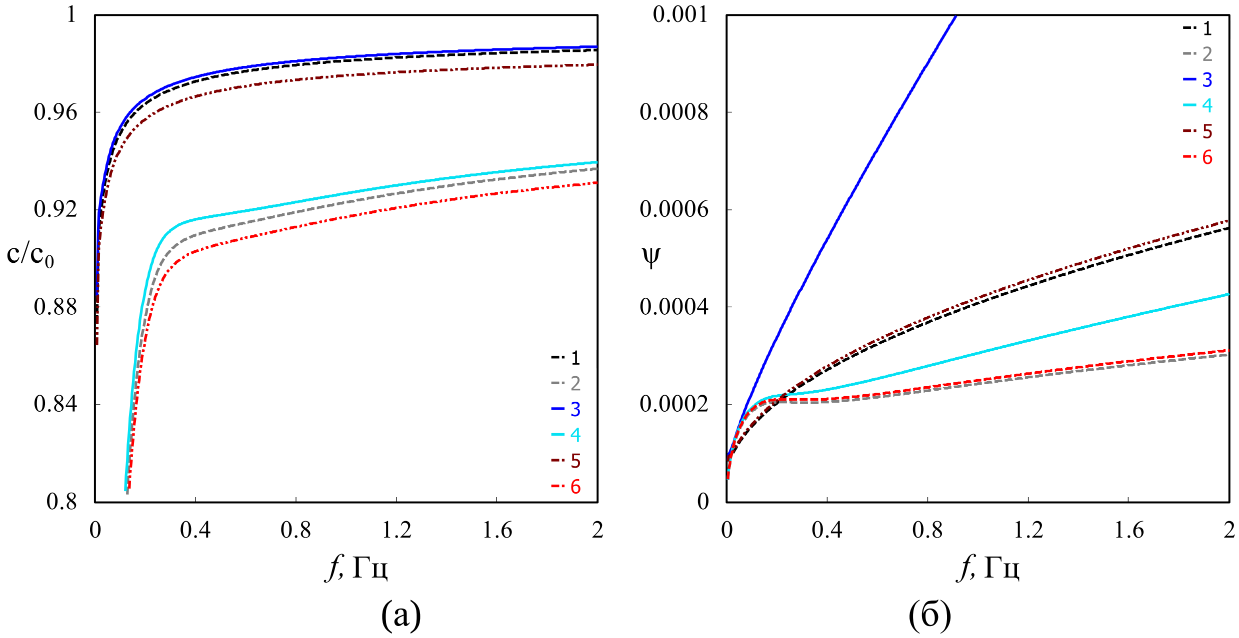

Рисунок 1 – Фазовая скорость (а) и коэффициент затухания (б)

Здесь приведены графики нормированной скорости распространения волны в сосуде c / c_0 (c_0 – скорость волны Моэнса-Кортевега) и обезразмеренного коэффициента затухания $\psi = -a\,\mathrm{Im}(\chi)$ в зависимости от частоты $f = \omega/2\pi$. Линии 1 и 2 соответствуют упругой оболочке, 3 и 4 – вязкоупругой оболочке, 5 и 6 – пороупругой оболочке с внутренними радиусами $a_1 = 20$ мм (крупная артерия) и $a_2 = 4$ мм (средняя артерия), соответственно. Вязкоупругая оболочка моделировалась комплексным модулем Юнга, значение мнимой части которого ($E_2 = 0.06$ МПа) также было определено из натурного эксперимента.

Как видно из рисунка, пороупругая модель дает гораздо меньшее влияние стенки на затухание волны, чем вязкоупругоая модель. Такие же результаты получены и для других значений модуля Юнга, соответствующих измеренным в экспериментах.

Заключение

В ходе данной работы изучены математическая модель пороупругой среды, теория упругих тонких оболочек и теория Энтони Мориса Био. На их основе построена безмоментная теория пороупругих тонких цилиндрических оболочек и выведено дисперсионное уравнение. На основании данных натурного эксперимента по одноосному растяжению образцов тканей кровеносного сосуда оценены модули упругости для различных отделов аорты, сонной и подвздошной артерий, а также параметры, характеризующие пороупругие свойства материала. Полученные оценки были использованы в численных расчетах скорости распространения пульсовой волны и коэффициента затухания в пакете программ Mathcad.

По результатам численных расчетов была проведена оценка влияния пороупругости стенки на распространение и затухание волны давления в кровеносном сосуде. Проведено сравнение с моделью однородной вязкоупругой стенки, характеризуемой постоянным комплексным модулем Юнга. Анализ результатов расчетов показал, что пороупругость стенки приводит к тому же качественному эффекту, что и вязкоупругость: коэффициент затухания волны увеличивается по сравнению со случаем упругой стенки. Однако с количественной точки зрения различия значительны: влияние пороупругости на коэффициент затухания не превосходит десяти процентов, в то время как вязкоупругость приводит к увеличению коэффициента затухания в несколько раз. Таким образом, результаты работы позволяют предположить, что при описании механического поведения сосудов с учетом внутреннего трения необходимо учитывать вязкоупругие свойства твердого каркаса.

Список использованных источников

1 Амбарцумян, С. А. К вопросу распространения пульсовой волны / С. А. Амбарцумян, Л. А. Мовсисян // Механика полимеров. – 1978. – № 4. – С. 696-701.

2 Вольмир, А. С. Проблемы динамики оболочек кровеносных сосудов / А. С. Вльмир, М. С. Герштейн // Механика полимеров. – 1970. – № 2. – С. 344-348.

3 Вильде, М. В. Низкочастотные осесимметричные волны в кровеносных сосудах постоянного сечения: асимптотический подход / М. В. Вильде, Ю. П. Гуляев // Механика твердого тела. – 2009. – № 4. – С. 136-151.

4 Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. – Ленинград : Гос. союзное изд-во судостроит. промыш-ти, 1962. – 417 с.

5 Biot, M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, part I: low frequency range / M.A. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – Vol. 28. – № 2. – P. 168–178.

6 Biot, M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, part II: higher frequency range / M.A. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – Vol. 28. – № 2. – P. 179–191.

7 Biot, M.A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media / M.A. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1962. – Vol. 34. – № 5. – P. 1254–1264.

8 Маслов, Л. Б. Конечно-элементные пороупругие модели в биомеханике / Л. Б. Маслов. – СПб. : Лань, 2013. – 236 с.