МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

«Применение двоичных базисных сплайнов в численном решении задачи Коши»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 218 группы
направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика
Ляшенко Елизаветы Витальевны

Научный руководитель
к.ф. – м.н., доцент ______________ Д.С. Лукомский

Зав. кафедрой
д.ф. – м.н., профессор ______________ В.А. Юрко

Саратов 2020

Введение. Изначально термин сплайн и его применение начали свое развитие после научной публикации Якоба Исаака Шёнберга в 1946 году. Особую популярность сплайны получили в теории приближения благодаря задачи интерполяции. Сплайн во многих случаях является решением дифференциальных уравнений, описывающих всевозможные физические процессы.

Типичной задачей приближения является задача интерполяции. Классическим методами решения задачи интерполяции являются такие конструкции, как интерполяционный многочлен Лагранж или интерполяционный многочлен Ньютона, однако они являются примером глобальной интерполяции, что является существенным недостатком. Для решения этого недостатка была придумана интерполяция функциями, которые были бы непрерывны в узлах склейки локальных многочленов по производным первого, второго порядка и так далее. Для решения этого недостатка была придумана интерполяция функциями, которые были бы непрерывны в узлах склейки локальных многочленов по производнымпервого,второгопорядкаитакдалее.Такую функцию назвали сплайном.Подобное название объясняется сходством такой математической конструкции с длинными тонкими рейками чертежника, которые они использовали в качестве лекал, проводя с их помощью плавные кривые через заданные точки.

Сплайн во многих случаях является решением дифференциальных уравнений, описывающих всевозможные физические процессы. Если необходимо изучить линейное пространство всех сплайнов, то можно будет говорить о базисе этого линейного пространства. Таким базисом являются сплайны, построенные специальным образом, которые называются базисными или B-сплайнами. С их помощью любой сплайн можно представить в виде линейной комбинации B-сплайнов. Этот факт позволяет уменьшить количество вычислений при построении произвольного интерполяционного сплайна, что является несомненным преимуществом. Основу теории B-сплайнов заложили Фергюсон, Шёнберг, Уитни и Карри.

Целью работы является изучение предложенной темы, проведение численного эксперимента. Двоичные базисные сплайны будут использованы в численном решении задачи Коши.

Основное содержание работы. В основной части работы описана теория сплайнов, приведены понятия классических сплайнов, базисных сплайнов и двоичных базисных сплайнов. Рассмотрен метод для построения двоичного базисного сплайна. Также рассматривается численное решение задачи Штурма-Лиувилля с помощью двоичных базисных сплайнов,описан алгоритм и написана программа для решения данной задачи на языке Java.

Сплайны. В данной главе мы рассмотрим общее определение сплайна, кубический сплайн и необходимые условия его существования, а так же дадим оценку погрешности для интерполяции кубическим сплайном.

Определение сплайна. Определение 1 *Рассмотрим произвольный отрезок* $[a, b]$*.Разделим этот отрезок на части*

$$a = x_0, x_1, ..., x_n = b. \tag{1}$$

Сплайном степени m *дефекта* r *называется* $(m - r)$ *раз непрерывнодифференцируемая функция, которая на каждом отрезке* $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{0, n}$ *представляет собой многочлен степени не выше* m.

Сплайн обозначается как $S^{(m,r)}$, а отрезки вида $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{0, n}$ называются сеткой сплайна $S^{(m,r)}$.

Отметим, что сплайн называется интерполирующим, если выполняется следующее условие :

$$S^{(m,r)}(x_k) = f(x_k), \tag{2}$$

где $f(x)$ - неизвестная функция, заданная своими значениями в точках x_k.

Кубический сплайн. Согласно определению, кубический сплайн это функция, которая на каждом сегменте сетки представляет собой кубический полином, непрерывный вместе со своими первой и второй производными. Причём первые и вторые производные в узлах сетки совпадают. В этой части работы мы подробно рассмотрим процесс построения кубического сплайна, определим условия его существования.

Рассмотрим произвольный отрезок $[a, b]$. Разделим этот отрезок на части

$$\Delta : a = x_0, x_1, ..., x_n = b. \tag{3}$$

Зададим соответствующие ординаты

$$Y : y_0, y_1, ..., y_{n-1}, y_n. \tag{4}$$

Требуется построить функцию $S^{(3,1)}$, непрерывную на отрезке $[a, b]$ вместе со своими первой и второй производными, совпадающую с кубическим полиномом на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{0, n}$, и удовлетворяющую условиям

$$S^{(3,1)}(x_y) = y_i. \tag{5}$$

Сплайн $S^{(3,1)}(x)$, построенный по сетке Δ впредь будет обозначать за $S_\Delta(x)$.

Базисные сплайны. В данной работе будет рассмотнрен два варианта варианта построения сплайнов, разделенная разность от усеченной степенной функции и свертка функций.

Базисные сплайны как разделенная разность от усеченной степенной функции. Пусть функция $f(x)$ задана значениями в точках $x_0, x_1, ..., x_m$

Определение 2 *Разделенной разностью первого порядка, построенной по значениям функции в узлах x_i, x_j называют отношение вида*

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \tag{6}$$

Без ограничения общности, в дальнейшем будем полагать, что разделенная разность строится по узлам с соседними номерами. Таким образом, определение (2.1) примет следующий вид

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{7}$$

Разделенную разность будем обозначать квадратными скобками. В качестве аргументов, в них будут выступать узлы x_i, участвующие в построении этой разделенной разности.

Перейдём к определению разделенной разности более высоких порядков[11].

Определение 3 *Назделенной разностью k-го порядка, построенной по значениям функции в узлах $x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}$ называется отношение вида*

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k})}{x_{i+k} - x_i} \tag{7}$$

Базисные сплайны как свертка функций. Будем рассматривать сплайны с сеткой $2^{-k}\mathbb{Z} = 2^{-k}l, l \in \mathbb{Z}$.Подобную сетку будем называть двоичной сеткой, а сплайн, построенные по такой сетке, соответственно, двоичным сплайном. За S_k^n обозначим пространство сплайнов порядка n дефекта 1 с сеткой $2^{-k}\mathbb{Z}$. Положим $S^n = S_0^n$. Легко увидеть также, что если $S(x) \in S^n$, то $S'(x) \in S^{n-1}$ и $S(2^k - l) \in S_k^n, k, l \in \mathbb{Z}$.

Определим по индукции последовательность функций $B_n(x), x \in \mathbb{R}, n = 0, 1, ...,$ следующим образом:

$$B_0(x) = \chi_{[0,1]}(x) \tag{8}$$

$$B_{n+1} = (B_n * B_0)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} B_n(x-t)B_0(t)\,dt = \int\limits_{x}^{x+1} B_n(t)\,dt \tag{9}$$

Фукнции $B_n(x)$ называются базисными сплайнами (B-сплайнами) порядка n.

Теорема 1 *Для функций $B_n(x)$ справедливы следующие условия:*

$$B_n(x) \in S^n, \tag{10}$$

$$B_n > 0, x \in (0, n+1), \tag{11}$$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} B_n(x-l) = 1, x \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$B'_{n+1}(x) = B_n(x) - B_n(x-1), x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Двоичные базисные сплайны. Дадим определение двоичным базисным сплайнам второго порядка, определим их как сдвиги одной функции и докажем, что любой двоичный бзисный сплайн второй степени можно представить в виде линейной комбинации базисных сплайнов.

Построение двоичного базисного сплайна второй степени. Рассмотрим функцию Уолша $W_3(x)$.

$$W_3(x) = \begin{cases} 1, x \in [0, \frac{1}{4}] \\ -1, x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 1, x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \tag{14}$$

Дважды проинтегрировав функцию Уолша, получим следующую функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 8x^2, x \in [0, \frac{1}{4}] \\ -8x^2 + 8x - 1, x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 8x^2 - 16x + 8, x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \tag{15}$$

Именно с этой функцией мы и будем в дальнейшем работать. Её график выглядит следующим образом Рассмотрим систему сдвигов функции $\varphi(x)$

$$\varphi(x)_{k \in \mathbb{Z}}, \tag{16}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x - \frac{k}{4})$.

Выпишем все функции $\varphi_k(x)$, носители которых пересекаются с отрезком $[0, 1]$. Это будут функции

$$\varphi_{-3}(x), \varphi_{-2}(x), \varphi_{-1}(x), \varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x). \tag{17}$$

Докажем одно важное свойство, справедливое для функций $\varphi(x)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Лемма 2 *Для любого $x \in [0, 1]$ выполняется следующее равенство*

$$\sum_{k=-3}^{3} \varphi_k(x) = 1. \tag{18}$$

Доказывается это утверждение непосредственным вычислением суммы.

Следствие 1 *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется следующее условие*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k(x) = 1. \tag{19}$$

Следствие 2 *Функция $\varphi(x)$ линейно выражается через свои сдвиги.*

Следствие 3 *Для любого $x \in \mathbb{R}$ сплайн порядка 2 дефекта 1 с узлами сетки в точках $\frac{k}{4}, k \in \mathbb{Z}$ представим в виде линейной комбинации функций* *из системы* $\varphi(x)_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0}$

$$S^{(2,1)}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0} \alpha_k\varphi_k(x). \tag{20}$$

Интерполяция двоичными базисными сплайнами второй степени. Перейдем к рассмотрению алгоритмов построения интерполяционного сплайна, который бы представлял собой линейную комбинацию (18). Пусть функция $f(x)$ задана своими значениями в точках

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, ..., x_n = \frac{n}{4} \tag{21}$$

Задача состоит в построении сплайна $S(x)$, удовлетворяющего условиям

$$S(x_i) = f(x_i) \tag{22}$$

Представим процесс построение в виде алгоритма: 1) Находим α_1 2) Находим α_2 3) Находим α_3 ... k) Находим α_k ... n) Находим α_n n+1) Строим линейную комбинацию $\sum_{k=-3,k\neq -1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$,

где α_k выглядит следующим образом:

$$\alpha_k = \frac{f(\frac{k-2}{4}) - \alpha_{k-2}\varphi_{k-5}(\frac{k-2}{4}) - \alpha_{k-1}\varphi_{k-4}(\frac{k-2}{4})}{\varphi_{k-3}(\frac{k-2}{4})} \tag{23}$$

Двоичные базисные сплайны в численном решении задачи Коши. Рассмотрим функцию Уолша W_7:

$$W_7(x) = \begin{cases} 1, x\in[0,\frac{1}{8}] \\ -1, x\in[\frac{1}{8},\frac{3}{8}] \\ 1, x\in[\frac{3}{8},\frac{4}{8}] \\ -1, x\in[\frac{4}{8},\frac{5}{8}] \\ 1, x\in[\frac{5}{8},\frac{7}{8}] \\ -1, x\in[\frac{7}{8},1] \end{cases} \tag{24}$$

Построение двоичного базисного сплайна третьей степени. Пусть $If(x) = \int_0^x f(t)dt$ - оператор интегрирования, $W_n(x)$ - функции Уолша в нумерации Пэли.

Определим следующую функцию

$$\varphi(x) = (2^2 I)(2^3 I) W_{2^3-1}(x), x \in [0,1]. \tag{25}$$

Данную функцию будем называть двоичным базисным сплайном 3-й степени. Полагаем, что вне отрезка $\varphi(x) = 0$. Данная функция является многочленом 3-й степени на каждом отрезке $[\frac{k}{2^3}, \frac{k+1}{2^3}] \subset [0,1]$, а также имеет неприрывную вторую производную.

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = f(x), 0 \leq x \leq 1, \tag{26}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0. \tag{27}$$

Предполагается, что $q, f \in C(0,1)$.

Далее строится сплайн $S_k(x)$ третьей степени, интерполирующий решение $y(x)$ в точках $x_k = k/n$:

$$S_k(x) := S_{k-1}(x) + (\frac{\psi(x - \frac{k-1}{n})}{\psi(\frac{1}{n})})(c_k - S_{k-1}(\frac{k}{n})). \tag{28}$$

Подставляя данное представление в (26), получается уравнение для нахождения c_k.

Численные эксперименты. В результате данной работы был написан алгоритм по получению численного решения задачи Коши с помощью двоичных базисных сплайнов третьей степени на языке Java.

В качестве входных данных были использованы следующие параметры :

1. $y(x)$ - функция, которую необходимо интерполировать;

2. $q(x)$ - произвольна фнукция;

3. n - количество точек.

В результате работы программы вычисляются все c_k, строится график, который показывает графики функции $y(x)$ и c_k в точках $x_k = k/n$. Рассмотрим 3 случая с разными параметрами $y(x)$, $q(x)$, n всегда будем брать равным 20:

1. $y(x) = sin(1 + 2x)$, $q(x) = x^2$;

2. $y(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$, $q(x) = 9x$;

3. $y(x) = e^{10x}$, $q(x) = x$.

Получившиеся результаты представлены в виде графиков на рисунках 1-3. Заметно, что чем быстрее растет функция $y(x)$, тем сильнее растет погрешность между точным решением и приближенным.

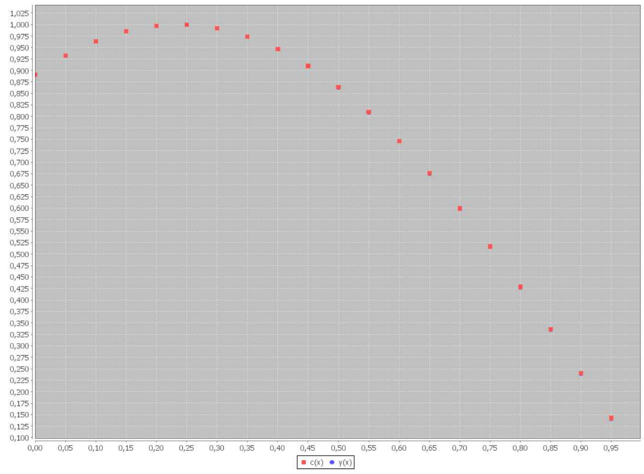

Рисунок 1: $y(x) = sin(1 + 2x)$

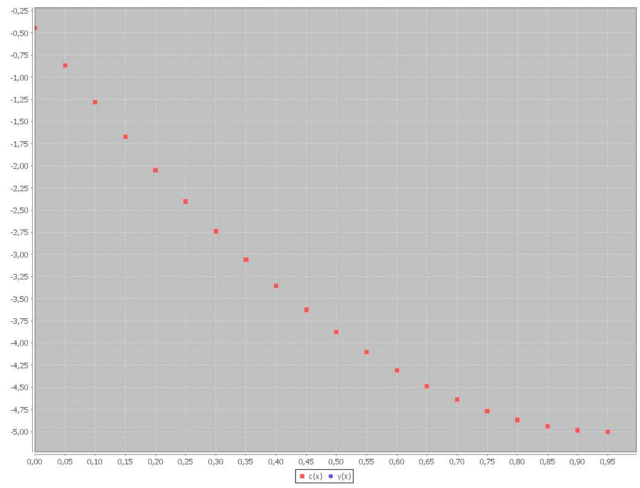

Рисунок 2: $y(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

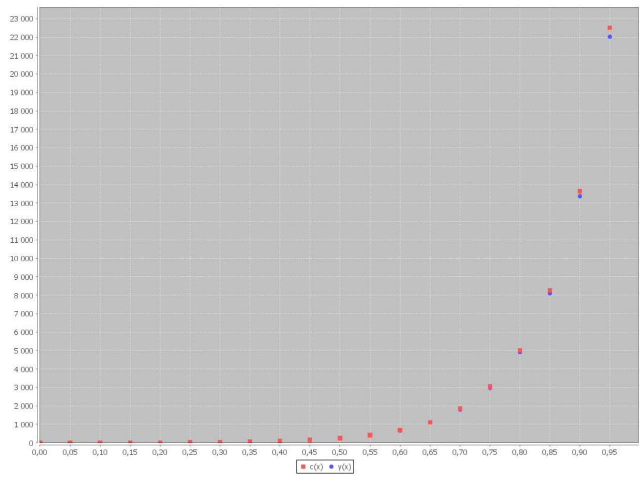

Рисунок 3: $y(x) = e^{10x}$

Заключение. В магистерской работе были изучены такие темы,классическая теория сплайнов, базисные сплайны и двоичные базисные сплайны второй и третьей степени. Двоичные базисные сплайны третьей степени будут использованы в численном решении задачи Коши.

В основной части работы описана теория сплайнов, приведены понятия классических сплайнов, базисных сплайнов и двоичных базисных сплайнов. Рассмотрен метод для построения двоичного базисного сплайна. Также рассматривается численное решение задачи Штурма-Лиувилля с помощью двоичных базисных сплайнов,описан алгоритм и написана программа для решения данной задачи на языке Java.

По изученному материалу был проведен численный эксперимент.