МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Полиномиальная интерполяция на симплексах

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 218 группы

направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Сердогалиевой Эльмиры Владимировны

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н. ____________ Ю.В. Матвеева

дата, подпись

Зав. кафедрой

д.ф.-.м.н., профессор ____________ Д.В. Прохоров

дата, подпись

Саратов 2020

Введение. В данной работе рассматривается вопрос о возможности построения интерполяционного полинома, обеспечивающего достаточно высокую гладкость результирующей кусочно-полиномиальной функции (при интерполяции Эрмита), а также позволяющего ослабить "условия наименьшего угла".

Как правило, оценки погрешности аппроксимации производных интеполируемой функции характеризуются двумя параметрами — диаметром разбиения (триангуляции) и еще некоторой характеристикой симплекса. Так, в двумерном случае в большинстве работ в качестве второй характеристики служит синус наименьшего угла триангуляцию.

Данный вопрос является открытым до сих пор, так например в диссертационной работе Байдаковой Н.В. изучаются вопросы, связанные с полиномиальной интерполяцией и аппроксимацией функций многих переменных на d-симплексе в равномерной норме (рассматриваются случаи $d = 2, 3$ или $d \in N$). Способы интерполяции на произвольном симплексе выбираются таким образом, чтобы результирующий сплайн, определенный на триангулированной области, обладал свойством непрерывности или гладкости порядка $m, m \geq 1$ (под сплайном мы понимаем функцию, которая на каждом симплексе из триангуляции области Ω является алгебраическим многочленом, причем эти многочлены задаются таким образом, чтобы результирующая кусочно-полиномиальная функция на всей области обладала свойством непрерывности или гладкости заданного порядка; под гладкостью порядка m — существование и непрерывность всех производных до порядка m включительно).

Также Байдаковой Н.В. предлагается способ эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике, в оценках которого наименьший угол заменен на средний (наибольший). Предположение о том, что для третьей степени задача может быть решена положительно, причем решение неединственно, возникло в совместных обсуждениях с Ю.Н. Субботиным, предложившим свой способ интерполяции.

В работе изучается сходимость локальных интерполяционных и кратных интерполяционных процессов, связанных с аппроксимацией функций многих переменных на многогранных областях кусочно полиномиальными функциями, связанными с разбиением области на симплексы.

Далее Байдаковой Н.В. рассматривался один из способов выбора условий интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике, порождающий непрерывную результирующую кусочно-полиномиальную функцию на триангулированной области. Получено усиление оценок сверху величин погрешности аппроксимации производных третьего порядка интерполируемой функции без снижения точности оценок величин погрешности аппроксимации функции и производных первого и второго порядков.

Цели работы:

1. рассмотреть разные условия построения интреполяционного полинома
2. рассмотреть вопрос о существовании и единственности интерполяционного полинома
3. изучить оценки погрешности интерполяционного полинома
4. выполнить построение полиномов, построенным по разным условиям, для заданных функций
5. проанализировать и сформулировать результаты построения полиномов

Данная работа состоит из введения, пяти глав основной части, заключения, списка использованных источников, который содержит 13 источников. Также работа содержит 4 приложения, в которых приводятся решения задач 1 и 2 с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Первая и вторая главы посвящены рассмотрению интерполяционных условий, теоремы о существовании и единственности интерполяционного многочлена и оценок погрешности интерполяции.

Во третьей и четвертой главах выполняются построения полиномов по условиям рассмотренных задач 1 и 2 для заданных функций на двух треугольниках. Подведены результаты построений графиков.

В пятой главе выполнено построение полиномов, построенных по разным условиям задач 1 и 2, для заданных функций. Также описаны результаты полученных построений.

Основное содержание. В задаче 1 рассматривается невырожденный треугольник $\Delta \subset \mathbb{R}^2$; a_i $(i = 1,\,2,\,3)$ — вершины треугольника Δ. Внутренние углы треугольника при вершинах a_1, a_2, a_3 обозначим через α, β, θ соответственно. Пусть $0 < \alpha \le \beta \le \theta$. Разместим треугольник в прямоугольной системе координат так, чтобы его вершины имели координаты: $a_1 = (a+b, 0)$, $a_2 = (0,0)$, $a_3 = (a,h)$, где $a,b,h > 0$. При выбранном соотношении углов длина наибольшей стороны равна $a+b = H$ и, кроме того, $0 < a \le b$. Далее будет рассматриваться множество W^4M функций, непрерывных на Δ вместе со всеми своими частными производными до порядка 4 включительно, у которых все производные четвертого порядка ограничены по модулю константой M.

Задача состоит в построении интерполяционного многочлена третьей степени на треугольнике, в оценках погрешности которого наименьший угол всюду заменен на средний (наибольший).

Через $P_3(x,y) = P_3(z) = P_3(f;z)$, где $z = (x,y)$, обозначим многочлен степени не выше 3 по совокупности переменных, удовлетворяющий следующим интерполяционным условиям (под степенью многочлена по совокупности переменных x и y понимается наибольшее из чисел $k+l$ для входящих в него мономов $x^k y^l$):

$$f(a_i) = P_3(a_i), i = 1,2,3; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial x} = \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial x}, i = 1,2,3; \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial y} = \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial y}, i = 1,2,3; \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 f(a_2)}{\partial \xi \partial \tau} = \frac{\partial^2 P_3(a_2)}{\partial \xi \partial \tau}, \tag{1.4}$$

где ξ и τ – единичные векторы, направленные от a_2 к a_1 и от a_2 к a_3 соответственно.

Далее рассматриваем задачу 2, в которой все геометрические характеристики совпадают с характеристиками задачи 1.

Рассматриваем условия (1.1)-(1.3)

$$f(a_i) = P_3(a_i), \frac{\partial f(a_i)}{\partial x} = \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial x}, \frac{\partial f(a_i)}{\partial y} = \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial y}, i = 1, 2, 3. \tag{2.1}$$

Эти условия обеспечивают непрерывность итоговой кусочно-полиномиальной функции на Ω и часто выбираются в методе конечных элементов.

Но вместо условия (1.4) будем использовать следующее условие

$$\frac{\partial^3 f(a_2)}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 P_3(a_2)}{\partial y^3}, \tag{2.6}$$

Вопрос интерполяции функции в соответствие с условиями (2.1),(2.6) уже рассматривался, однако в знаменателях полученных там оценок сверху для производных второго и третьего порядков присутствует синус наименьшего угла треугольника.

Существование и единственность интерполяционного полинома.

Рассматривается Теорема 1, согласно которой для функции $f(x, y)$, удовлетворяющей условиям (1.1)-(1.4) или (2.1),(2.6), существует единственный интерполяционный полином.

В доказательстве теоремы приводится вид интерполяционного полинома

$$P_3(x, y) = \tilde{a}_1 x^3 + \tilde{a}_2 y^3 + \tilde{a}_3 x^2 y + \tilde{a}_4 x y^2 + \tilde{a}_5 x^2 + \tilde{a}_6 y^2 + \tilde{a}_7 xy + \tilde{a}_8 x + \tilde{a}_9 y + \tilde{a}_{10}, \tag{1.5}$$

Для каждой из задач по условиям (1.1)-(1.4) и (2.1),(2.6) записываются системы для поиска коэффициентов $\tilde{a}_i, i = \overline{1, 10}$.

Система однозначно разрешима тогда и только тогда, когда её определитель отличен от нуля. Определитель матрицы не равен нулю в силу условия $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Таким образом, коэффициенты $\tilde{a}_i, i = \overline{1, 10}$ (то есть решение системы) находятся однозначно. Следовательно, интерполяционный полином существует и единствен.

Данная теорема дает один из возможных способов построения интерполяционного полинома. Но для этого требуется решить другую сложную задачу - систему линейных уравнений. Для её решения используем систему компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

И после нахождения коэффициентов $\tilde{a}_i, i = \overline{1,10}$ записываем вид полинома $P_3(x,y)$ для обеих задач.

Оценки погрешности интерполяции.

Пусть $e(x,y) = f(x,y) - P_3(x,y)$ — погрешность интерполяции.
Для $j = 0, 1, 2$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial x^{2-j}\partial y^j}\right| \le RMH^2 \frac{1}{sin^j \beta}. \tag{1.8}$$

Для $j = 0, 1, 2, 3$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x^{3-j}\partial y^j}\right| \le RMH \frac{1}{sin^j \beta}. \tag{1.11}$$

Для $j = \overline{0,3}$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x^{3-j}\partial y^j}\right| \le \begin{cases} MH \text{ при } j = 0, 3, \\ MH(\sin\beta)^{-1} \text{ при } j = 1, \\ MH(\sin\beta \operatorname{tg}\beta)^{-1} \text{ при } j = 2. \end{cases} \tag{2.11}$$

Для $j = \overline{0,2}$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial x^{2-j}\partial y^j}\right| \le \begin{cases} MH^2 \text{ при } j = 0, \\ MH^2(\sin\beta)^{-1} \text{ при } j = 1, \\ MH^2(\sin\beta \operatorname{tg}\beta)^{-1} \text{ при } j = 2. \end{cases} \tag{2.22}$$

Здесь (1.8),(1.11) и (2.11),(2.22) - оценки задач (1.1)-(1.4) и (2.1),(2.6) соответственно.

Главы 3-5 работы посвящены практическим задачам: для заданных функций построены интерполяционные кубические полиномы двух видов, а именно, полиномы, удовлетворяющие интерполяционным условиям (1.1)-(1.4) и (2.1),(2.6). Построены графики функций и полиномов, проведен анализ результатов построений.

Заключение. В работе были рассмотрены разные условия построения интреполяционного полинома; изучен вопрос о существовании и единственности интерполяционного полинома; рассмотрены оценки погрешности интерполяционного полинома; выполнено построение полиномов, построенных по разным условиям, для заданных функций; проанализированы и сформулированы результаты построения полиномов.

После сравнения результатов построения сделан вывод о том, что полиномы обеих задач в одинаковой степени удачны в приближении к заданной функции, но в случае тригонометрических функций можем наблюдать достаточно сильное отличение приближения от функции.

Все вычисления и построения были выполнены с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.