МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

АЛГОРИТМЫ ФРЕЙМОВЫХ И БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО АФФИННЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 218 группы
направления 01.04.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Канахина Ивана Александровича

Научный руководитель профессор, д. ф.-м. н.	____________	П. А. Терехин
Заведующий кафедрой д. ф.-м. н., доцент	____________	С. П. Сидоров

Саратов 2020

Введение. В магистерской работе рассматриваются аффинные системы функций на единичном отрезке, порожденные двоичными сжатиями и целочисленными сдвигами одной функции, а также определено понятие дуальной функции к порождающей функции системы и рассмотрены ее свойства.

Подобные системы представляют собой важный специальный класс функциональных систем, удобный и показательный для отработки различных методов и подходов к решению общей задачи о представлении функций рядами.

Актуальность темы. В настоящее время, аффинные системы находят многочисленные применения в различных областях математики, такие как: дифференциальные уравнения, функциональный анализ, в теории всплесков, в нелинейных, в частности жадных, аппроксимациях, в вопросах представления функций рядами, а также в прикладных задачах обработки, хранения и передачи информации, сжатии изображений и теории сигналов.

Цель магистерской работы - изучить аффинные системы функций, рассмотреть условия сходимости биортогонального ряда по элементам аффинной системы, составить алгоритм вычисления коэффициентов биортогонального ряда и реализовать программу вычисления коэффициентов, изучить понятие дуальной функции, составить алгоритмы вычисления коэффициентов дуальной функции и реализовать программу вычисления коэффициентов.

Для достижения поставленных целей в работе необходимо решить следующие **задачи**:

— определить основные понятие, связанные с аффинным синтезом и дуальной функцией;
— сформулировать и доказать основные теоремы, в частности, об образовании системы Бесселя и базиса Рисса;
— составить алгоритмы вычисления коэффициентов биортогонального ряда и дуальной функции;
— разработать программную реализацию вычисления коэффициентов биортогонального ряда и дуальной функции;

Апробация работы. По данной теме принималось участие в конференции XX Международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения», а также в Саратовском национальном исследовательском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского на семинаре под руководством профессора С.Ф. Лукомского.

Структура и содержание магистерской работы. Работа состоит из введения, двух основных разделов, каждый из которых включает несколько подразделов, заключения, списка использованных источников и двух приложений.

Основное содержание работы. Рассматриваются аффинные системы функций (системы двоичных сжатий и целочисленных сдвигов функции). Для действительнозначной или комплекснозначной функции $\varphi(t), t \in \mathbb{R}$, с носителем $\operatorname{supp} \varphi \subset [0,1]$ на единичном отрезке и для натурального числа $n = 2^k + j$, где $k = 0, 1, ...$ и $j = 0, ..., 2^k - 1$, положим

$$\varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = 2^{k/2}\varphi(2^k t - j).$$

Кроме того, пусть $\varphi_0 = \chi_{[0,1]}$ - характеристическая функция единичного отрезка. Последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *аффинной системой* или *системой сжатий и сдвигов*, порожденной функцией φ. Примером аффинной системы является классическая система Хаара $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$, порожденная функцией $\chi = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{[1/2,1]}$.

Определение 1. *Системой Хаара называется система функций* $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$, *которая состоит из функции* $\chi_0(x) \equiv 1$ *тождественно равной единицы, на отрезке* $[0,1]$, *и функций*

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, & \text{при } x \in \left[2^{-k}j, 2^{-k}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right], \\ -2^{k/2}, & \text{при } x \in \left[2^{-k}\left(j+\frac{1}{2}\right), 2^{-k}(j+1)\right], \\ 0, & \text{при } x \notin \left[2^{-k}, 2^{-k}(j+1)\right], \end{cases}$$

где $n = 2^k + i$ - стандартное представление.

Подобно функциям Хаара функции аффинной системы имеют локализованные носители $\operatorname{supp} \varphi_n = \operatorname{supp} \varphi_{k,j} \subset [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}]$ внутри единичного отрезка. То обстоятельство, что значения функций $\varphi(t)$ аффинной системы определяются значениями лишь одной порождающей функции $\varphi(t)$ (так называемое *свойство когерентности* функций системы), делает аффинные системы функций удобным инструментом при решении различных вычислительных задач. При этом произвольность выбора порождающей функции φ позволяет наделять функции аффинной системы дополнительными желаемыми свойствами, такими, как гладкость либо фрактальность, монотонность или выпуклость, наличие различных симметрий графика и т.п. Аффинные системы функций являются частным случаем неортогональных всплескоподобных систем функций, или, в другой терминологии, полных (в том смысле, что индексы m, n принимают всевозможные целые значения) аффинных систем вида

$$\psi_{m,n}(t) = a^{m/2}\psi(a^m t - nb), \qquad m, n \in Z,$$

где $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ и $a > 1, b > 0$.

В теории всплесков свойства системы $\{\psi_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ часто формулируются в терминах преобразования Фурье порождающей функции

$$\hat{\psi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi it\omega} dt.$$

Определение 2. *Базисом Рисса*, или *базисом, эквивалентным ортонормированному*, называется система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H, для которой существуют ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H и обратимый оператор $J : H \to H$ такие, что $\varphi_n = Je_n, n = 1, 2, \ldots$.

Определение 3. *Фреймом* называется система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов гильбертова пространства H, для которой существуют постоянные $0 < A \le B < \infty$ такие, что для любого вектора $h \in H$ последовательность коэффициентов Фурье $\{(h, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$A\|h\|_H \le \|\{(h, \psi_n)\}\|_{\ell^2} \le D\|h\|_H, \tag{1}$$

где ℓ^2 – гильбертово пространство всех числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

Теорема 1. *Если порождающая функция φ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(\varphi, \chi_n)| \right)^{1/2} < |(\varphi, \chi_1)|,$$

то аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом Рисса.

Для нахождения коэффициентов биортогонально сопряженной функции в пространстве $L^1[0,1]$, составим следующий алгоритм:

1. Получим значения $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, n = 1, ..., 2^{N-1}$, которые вычисляются по следующим формулам:

$$x_0 = \int_0^1 \psi(t)dt = 1, \qquad x_n = \int_{2^{-k}j}^{2^{-k}(j+1/2)} \psi(t)dt - \int_{2^{-k}(j+1/2)}^{2^{-k}(j+1)} \psi(t)dt,$$

   где $n = 2k + j$ – стандартное представление числа $n \in \mathbb{N}$.
2. Установим естественное взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством $\mathbb{A}$, при котором каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ соответствует мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \mathbb{A}$, где $n = 2^k + j$ – стандартное представление и $j = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu 2^{k-\nu}$ – двоичное разложение;
3. По числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, n = 1, ..., 2^{N-1}$ создадим новую числовую последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, n = 1, ..., 2^{N-1}$ следующим образом. Для определения y_n воспользуемся заменой индекса, основанной на взаимно однозначном соответствии между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{A}$;
4. Зная, что при $\nu = 0$ и $\nu = k$ один из мультииндексов при x или y пустой, обозначим $x(\oslash) = x_1 = 1$ и $y(\oslash) = y_1 = 1$;
5. Рекуррентные соотношения запишем в виде

$$y(\alpha_1, ..., \alpha_k) = -x(\alpha_1, ..., \alpha_k) - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{k} x(\alpha_1, ..., \alpha_{\nu-1}) y(\alpha_{\nu+1}, ..., \alpha_k);$$

6. Вычислим $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, n = 1, ..., 2^{N-1}$ из получившегося рекуррентного соотношения.

С реализацией алгоритма можно ознакомиться в приложении работы.

Определение 4. *Дуальной функцией* к порождающей функции φ аффинной системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ будем называть формальный ряд по системе Хаара

$$\varphi^d \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n \chi_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} y_\alpha \chi_\alpha,$$

где последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ коэффициентов формального ряда, определяющего дуальную функцию φ^d, связана с последовательностью $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ коэффициентов ряда Фурье–Хаара порождающей функции φ соответствующими рекуррентными соотношениями.

Определение 5. Говорят, что ряд Фурье–Хаара

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \chi_n) \chi_n$$

функции $f \in L^2[0, 1]$ абсолютно сходится по пачкам, если конечна величина

$$\|f\|_* = |(f, \chi_0)| + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{n=2^k}^{\infty} (f, \chi_n)|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

Теорема 2. *Пусть порождающая функция φ и дуальная функция φ^d обе принадлежат классу L^2_*. Тогда аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса.*

Теорема 3. *Если функция φ имеет абсолютно сходящийся по пачкам ряд Фурье–Хаара, то аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является системой Бесселя.*

Теорема 4. *Для того чтобы аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ была базисом*

Рисса, необходимо и достаточно, чтобы обе аффинные системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{\varphi_n^d\}_{n=0}^{\infty}$ *являлись системами Бесселя.*

Множество $\mathbb{A}$ можно рассматривать как свободную полугруппу с двумя образующими, 0 и 1, относительно операции конкатенации мультииндексов

$$\alpha\beta = (\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_l),$$

где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ и $\beta = (\beta_1, ..., \beta_i)$. Понятно, что $\mathbb{A}$ также можно рассматривать как множество вершин бесконечного полного двоичного дерева.

Имеется естественное взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством $\mathbb{A}$, при котором каждому натуральному числу $n \in N$ соответствует мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in A$, где $n = 2^k + j$ – стандартное представление и $j = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu 2^{k-\nu}$ – двоичное разложение; $|a|$ – длина последовательности, т. е. $|\alpha| = k$.

По числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ создадим новую числовую последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом. Пусть $y_1 = 1$ и при $n > 2$ для определения y_n воспользуемся заменой индекса, основанной на взаимно однозначном соответствии между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{A}$.

При этом каждому n соответствует набор $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ коэффициентов двоичного разложения

$$n = 2^k + \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu 2^{k-\nu}$$

и $\mathbb{A}$ – множество всех конечных наборов, состоящих из нулей и единиц). Именно, числа $y_n = y_{k,j} = y(\alpha_1, ..., \alpha_k) = y_\alpha$ находим из рекуррентных соотношений

$$\sum_{\nu=0}^{k} x(\alpha_1, ..., \alpha_\nu) y(\alpha_{\nu+1}, ..., \alpha_k) = 0, \qquad k \geq 1.$$

при $\nu = 0$ и $\nu = k$ один из мультииндексов при x или y пустой, и тогда $x(\oslash) = x_1 = 1$ и $y(\oslash) = y_1 = 1$. Поэтому рекуррентные соотношения можно переписать в виде

$$-y(\alpha_1, ..., \alpha_k) = x(\alpha_1, ..., \alpha_k) + \sum_{\nu=1}^{k-1} x(\alpha_1, ..., \alpha_\nu) y(\alpha_{\nu+1}, ..., \alpha_k)$$

.

Для определения $y(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ достаточно знать значения $x(\alpha_1, ..., \alpha_\nu), 1 \leq \nu \leq k$, расположенные на одной ветке двоичного дерева $\mathbb{A}$, и ранее вычисленные значения $y(\alpha_{\nu+1}, ..., \alpha_k), 1 \leq \nu \leq k-1$, расположенные на одной ветке инвертированного двоичного дерева, где $i(\alpha_1, ..., \alpha_k) = (\alpha_k, ..., \alpha_1)$ – инверсия мультииндекса. Таким образом, рассмотренные рекуррентные соотношения корректно определяют $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Указанные рекуррентные соотношения генерируются посредством операции некоммутативной свертки

$$(x * y)_\alpha = (x * y)(\alpha_1, ..., \alpha_k) = \sum_{\nu=0}^{k} x(\alpha_1, ..., \alpha_\nu) y(\alpha_{\nu+1}, ..., \alpha_k) = \sum_{\alpha=\beta\gamma} x_\beta y_\gamma$$

числовых функций (последовательностей), заданных на свободной полугруппе с двумя образующими (двоичном дереве) $\mathbb{A}$.

Обозначим через $X(\mathbb{A})$ множество всех числовых функций (последовательностей) $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} = \{x_n\}_{n \in N}$ и через $X^{-1}(\mathbb{A})$ множество всех $x \in X(\mathbb{A})$, для которых $x(\oslash) = x_1 \neq 0$. Зададим элемент $e \in X(\mathbb{A})$ соотношением

$$e_\alpha = \begin{cases} 1, & |\alpha| = 0, \\ 0, & |\alpha| \geq 1. \end{cases}$$

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) $(X(\mathbb{A}), *)$ *является полугруппой с единицей* e *(моноидом)*;

2) *для* $x \in X^{-1}(\mathbb{A})$ *и* $x', x'' \in X(\mathbb{A})$ *выполняются законы сокращения*

$$x * x' = x * x'' \quad \Longrightarrow \quad x' = x'', \quad x' * x = x'' * x \quad \Longrightarrow \quad x' = x'';$$

3) $X^{-1}(\mathbb{A})$ *совпадает с группой обратимых элементов моноида* $(X(\mathbb{A}), *)$.

Доказательство.

1) Ассоциативность операции свертки

$$(x * (y * z))_\alpha = \sum_{\alpha=\beta\gamma\delta} x_\beta y_\gamma z_\delta = ((x * y) * z)_\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{A},$$

следует из ассоциативности конкатенации. Очевидно, что элемент e является двусторонней единицей: $x * e = e * x = x$ для всех $x \in X(\mathbb{A})$.

2) Докажем первый закон сокращения. Пусть $x*x' = x*x''$. При $|\alpha| = 0$ для пустого мультииндекса имеем $x(\oslash)x'(\oslash) = x(\oslash)x''(\oslash)$, откуда $x'(\oslash) = x''(\oslash)$ в силу условия $x(\oslash) \neq 0$. Предположим, что равенства $x'_\beta = x''_\beta$ уже доказаны для всех $|\beta| < k$. Возьмем $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$. Имеем

$$x(\oslash)x'(\alpha_1, ..., \alpha_k) = (x * x')(\alpha_1, ..., \alpha_k) - \sum_{\nu=1}^{k} x(\alpha_1, ..., \alpha_\nu)x'(\alpha_{\nu+1}, ..., \alpha_k) =$$

$$= (x * x'')(\alpha_1, ..., \alpha_k) - \sum_{\nu=1}^{k} x(\alpha_1, ..., \alpha_\nu)x''(\alpha_{\nu+1}, ..., \alpha_k) =$$

$$= x(\oslash)x''(\alpha_1, ..., \alpha_k),$$

откуда $x'\alpha = x''\alpha$. Второй закон сокращения доказывается аналогично.

3) Пусть $x \in X^{-1}(\mathbb{A})$. Без ограничения общности можно предположить, что $x(\oslash) = 1$. Тогда посредством рекуррентных соотношений определен элемент y такой, что $x * y = e$. Это означает, что y является правым обратным к x. Покажем, что он будет также и левым обратным. Положим $e' = y * x$. Будем иметь $x * e' = x * (y * x) = (x * y) * x = e * x = x * e$, откуда $e' = e$ по первому закону сокращения. Следовательно, $y = x^{-1}$ - (двусторонний) обратный к x элемент. Осталось заметить, что не принадлежащие множеству $X^{-1}(\mathbb{A})$ элементы заведомо не обратимы.

Теорема 5. *Пусть аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является бесселевой и дуальная функция φ^d принадлежит пространству $L^2[0,1]$.*

Тогда $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – полная в пространстве $L^2[0,1]$ система.

Теорема 6. *Пусть аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом Рисса. Тогда дуальная функция φ^d принадлежит пространству $L^2[0,1]$.*

Для нахождения коэффициентов дуальной функции, воспользуемся следующим алгоритмом:

1. Получим значения $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, n = 1, ..., 2^{N-1}$, где

$$x_n = (\varphi, \chi_n) = \int_0^1 \varphi(t)\chi_n(t)dt$$

– коэффициенты Фурье–Хаара.

Нормируем первый коэффициент условием

$$x_1 = \int_0^{1/2} \varphi(t)dt - \int_{1/2}^1 \varphi(t)dt = 1$$

Заметим, что если $x_1 = 0$, то аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ заведомо будет неполной, поскольку функция Хаара χ оказывается ортогональной всем функциям этой системы

2. Установим естественное взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством $\mathbb{A}$, при котором каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ соответствует мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \mathbb{A}$, где $n = 2^k + j$ – стандартное представление и $j = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu 2^{k-\nu}$ – двоичное разложение;
3. По числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, n = 1, ..., 2^{N-1}$ создадим новую числовую последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, n = 1, ..., 2^{N-1}$ следующим образом. Для определения y_n воспользуемся заменой индекса, основанной на взаимно однозначном соответствии между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{A}$;
4. Зная, что при $\nu = 0$ и $\nu = k$ один из мультииндексов при x или y пустой, обозначим $x(\oslash) = x_1 = 1$ и $y(\oslash) = y_1 = 1$;
5. Рекуррентные соотношения запишем в виде

$$-y(\alpha_1, ..., \alpha_k) = x(\alpha_1, ..., \alpha_k) + \sum_{\nu=1}^{k-1} x(\alpha_1, ..., \alpha_\nu)y(\alpha_{\nu+1}, ..., \alpha_k);$$

6. Вычислим $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, n = 1, ..., 2^{N-1}$ из получившегося рекуррентного соотношения.

С реализацией алгоритма можно ознакомиться в приложении работы.

Заключение. Для достижения поставленных целей в работе были выполнены следующие задачи:

- определены основные понятие, связанные с аффинным синтезом и дуальной функцией;
- сформулированы и доказаны основные теоремы, в частности, об образовании системы Бесселя и базиса Рисса;
- составлены алгоритмы вычисления коэффициентов биортогонального ряда и дуальной функции;
- написана программная реализацию вычисления коэффициентов биортогонального ряда и дуальной функции;