МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Ранговые функции в булево-матричном анализе

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 217 группы

направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Зубковой Наталии Алексеевны

Научный руководитель
профессор, д.ф. – м.н., доцент ____________ В. Б. Поплавский
(подпись)

Заведующий кафедрой
профессор, д.ф. – м.н., профессор ____________ В. В. Розен
(подпись)

Саратов 2020

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы

Булево-матричный анализ сегодня претерпевает бурное развитие в связи с его приложениями в различных областях научного познания. Матрицы с элементами из решеток, в частности, булевых алгебр применяются и в экономике, и при решении проблем диагностики в медицине, в генетике, и социальных науках. Обширно используется также в кибернетике, теории конечных недетерминированных автоматов, при решении проблем искусственного интеллекта, основываясь на таких математических теориях, как теория полугрупп, полуколец, полумодулей и комбинаторика. Зачастую моделирование в технике, физике, химии и геологии основано на использовании анализа булево-матричных функций. Так булевы матрицы над двухэлементной булевой алгеброй можно рассматривать как матрицы инцидентности графов, что делает очевидной связь булевых матриц с математической логикой и бинарными отношениями. Все это делает тему квалификационной работы *актуальной*.

Цели и задачи работы

В нашей работе рассматривается булева алгебра булевых матриц, операции которой (объединение, пересечение, дополнение) определяются поэлементно. С другой стороны, с помощью булевых операций строится операция матричного умножения, относительно которого квадратные булевы матрицы образуют полугруппу. В данной магистерской работе изучаются свойства этих операций. В частности, изучается проблема обратимости булевых матриц и разрешимости систем линейных булевых уравнений и неравенств. На множестве булевых матриц всевозможных размеров с операцией умножения вводятся эквивалентности Грина, определяемые через понятия главных идеалов. *Цель* этой выпускной магистерской работы – определение различных ранговых функций для булевых матриц и изучение их свойств.

Задачей магистерской работы является:

1. Определение и построение инвариантов идеалов частичной полугруппы булевых матриц всевозможных конечных размеров в форме ранговых функций;

2. Изучение свойств ранговых функций булевых матриц всевозможных конечных размеров;

3. Проведение вычислений ранговых функций конкретных матриц над различными булевыми алгебрами с применением вычислительной техники и непосредственно.

4. Применение ранговых функций к проблеме совместности булево-матричных уравнений и неравенств.

Структура работы

Данная магистерская работа состоит из введения, двух глав, содержащих по 5 и 10 параграфов соответственно, и заключения. В конце приводится список литературы, состоящий из 22 наименований.

Научная новизна

Алгоритмы вычисления столбцовых, строчных рангов были известны и ранее[1]. Различные системы компьютерной математики (Maple, Mathematica, MatLab, Derive и др.) применяются для указанных задач и содержат процедуры для расчетов, средств программирования, визуализации. Автором решена задача нахождения строчного и столбцового базисов булевой матрицы с применением программы Wolfram Mathematica.

Автором получено сравнение двух достаточных условий совместности для неравенств вида $XA \supseteq B$ или $AX \supseteq B$. В случае булевой алгебры $\mathbf{B_2} = \{0, 1\}$. была доказана большая эффективность

[1]Закревский А.Д. Нахождение минимального дизъюнктивного базиса булевой матрицы // ДАН БССР. 1978. Т.22, №1. С. 39—41.

минорно-ранговых функций для установления разрешимости этих неравенств (т.е. критерия Поплавского) по отношению к известным прежде аналитическим условиям совместности Люца. Это является основным и оригинальным результатом данной выпускной квалификационной работы.

Положения, выносимые на защиту

1. Рассмотрена проблема обратимости булевой матрицы.

2. Приведены критерии разрешимости систем систем булевых линейных уравнений и неравенств.

3. Указаны инвариантные свойства минорных, столбцовых, строчных, факторизационных и перманентных рангов. Получено сравнение ранговых функций.

4. Приводятся примеры вычисления различных рангов булевых матриц.

5. Доказано, что достаточные условия разрешимости булево - матричных неравенств вида $XA \supseteq B$, $AX \supseteq B$ в формулировке Поплавского с использованием минорно-ранговых функций являются более сильными, чем достаточные условия разрешимости этих неравенств в формулировке Люца.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе "Булевы матрицы" определяются по аналогии с обычной матричной теорией для булевых матриц понятия симметрии и косой симметрии.

Определение 1.2.1. Булева матрица A называется симметричной, если $A^T \cap A' = O$. Булева матрица A называется кососимметричной, если $A^T \cap A = 0$.

Следующее утверждение указывается однозначность представления булевой квадратной матрицы в виде дизъюнктной суммы симметричной и кососимметричной частей этой матрицы.

Теорема 1.2.4. Любая булева матрица может быть однозначно дизъюнктно разложена на симметричную и кососимметричную матрицу, то есть представима в виде объединения симметричной и кососимметричной матриц, пересечения которых равно нулю.

Далее даются определения строчно- и столбцово-совместимых матриц и изучаются их свойства, которые применяются для описания обратных булевых матриц матриц. Следующая теорема показывает, что обратные булевы матрицы являются аналогами числовых ортогональных матриц, т.е. $A^{-1} = A^T$.

Теорема 1.4.2. Для булевой квадратной матрицы существует обратная матрица тогда и только тогда, когда она ортогональна.

Отдельно рассматриваются решения уравнений $XA = B$ и $AX = B$. Основной результат изложен в теореме 1.5.3:

Теорема 1.5.3. $XA = B$ имеет решение тогда и только тогда, когда $B \subseteq (B'A^T)'A$.

В заключении первой главы указывается характеристики делителей нуля в полугруппе булевых матриц через свойство строчной или столбцовой совместимости булевой матрицы в виде следующего утверждения.

Теорема 1.5.5. Булева матрица A является правым (левым) делителем нуля, тогда и только тогда, когда A не является строчно (столбцово) совместимой.

Во второй главе "Ранговые функции на множестве булевых матриц " рассматривается множество булевых матриц всевозможных размеров над произвольной булевой алгеброй, на котором определена частичная, т.е. определенная не для всех элементов, операция произведения булевых матриц. На этом множестве, аналогично классам Грина $\mathbf{H}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{D}, \mathbf{J}$ теории полугрупп [2] , используя понятия односторонних и двусторонних идеалов этой частичной полугруппы булевых

[2]Клиффорд А. Алгебраическая теория полугрупп: в 2т. / Клиффорд А., Престон Г. М.:"МИР 1972. Т.1. 287 с.; Т.2. 422 с.

матриц всевозможных размеров, определяются классы эквивалентностей $\varepsilon_H, \varepsilon_R, \varepsilon_C, \varepsilon_D, \varepsilon_J$.

В работе вводятся понятия столбцового $rank_C A$, строчного $rank_R A$, факторизационного $rank_f A$ рангов булевой матрицы A следующими определениями.

Определение 2.1.3. Размерностью пространства столбцов $C(A)$ или столбцовым рангом матрицы A назовем число, обозначаемое либо $dimC(A)$, либо $rank_C A$, и равное наименьшему возможному числу столбцов всех таких матриц B, для которых $C(A) = C(B)$. Соответственно, размерностью пространства строк $R(A)$ или строчным рангом матрицы A назовем число, обозначаемое либо $dimR(A)$, либо $rank_R A$, и равное наименьшему возможному числу строк всех таких матриц B, для которых $R(A) = R(B)$.

Определение 2.1.4. Пусть для булевой матрицы $A_{m\times n} \in \mathbf{B}_{m\times n}$ существуют матрицы $\widetilde{A}_{m\times r} \in \mathbf{B}_{m\times r}$ и $\widetilde{\widetilde{A}}_{r\times n} \in \mathbf{B}_{r\times n}$ такие, что $A_{m\times n} = \widetilde{A}_{m\times r}\widetilde{\widetilde{A}}_{r\times n}$. Тогда наименьшее число r называется факторизационным рангом (или рангом факторизации) матрицы $A_{m\times n}$. Этот ранг факторизации будем обозначать через $r = rank_f A$.

В параграфе 2.4 вводятся понятия булевых определителей и перманентов. Изучаются их свойства. Это позволяет дать определения минорного $rankA$ и перманентного $rank_{Per} A$ ранга следующим образом:

Определение 2.4.1. *Минорным рангом* ненулевой матрицы назовем натуральное число k ($1 \leq k \leq min(m, n)$), удовлетворяющее двум условиям: существует квадратный блок M_k порядка k матрицы A, определитель которого отличен от нуля, и если из матрицы A можно построить $(k+1)$-блоки, то их определители равны нулю.

Ранг нулевой матрицы, считается равным нулю.

Определение 2.4.3. *Перманентным рангом* назовем наибольший порядок k квадратного блока, перманент которого отличен от нуля.

Перманентный ранг нулевой матрицы считается равным нулю. Обозначим его как $rank_{Per}A$.

Очевидно, из включения $DetA \subseteq PerA$, верного для любой квадратной булевой матрицы A, сразу следует сравнение перманентного и минорного рангов, указанное в следующей теореме.

Теорема 2.4.2. Для любой матрицы с элементами из булевой алгебры выполняется неравенство

$$rank_{Per}A \geq rankA.$$

Показывается, что столбцовые, строчные, факторизационные и минорные ранги являются инвариантами для J-класса частичной полугруппы булевых матриц всевозможных конечных размеров. Причем минорные ранги не превосходят столбцовые, строчные, факторизационные и перманентные ранги. Точнее, выполняется следующая теорема.

Теорема 2.6.3. Для любой булевой матрицы A выполняются следующие неравенства:

$$rankA \leq rank_f A \leq min(rank_R A, rank_C A).$$

Следующее утверждение аналогично известному свойству матриц с элементами из поля.

Теорема 2.6.4. Минорный ранг произведения любых булевых матриц не превосходит минорных рангов сомножителей:

$$rankAB \leq rankA, \quad rankAB \leq rankB.$$

Инвариантность минорного ранга утверждает следующая теорема.

Теорема 2.6.5. Минорные ранги всех матриц, находящихся в одном ε_J-классе частичной полугруппы булевых матриц всевозможных размеров равны.

Следующая теорема подводит итог исследованиям ранговых функций над булевыми матрицами, порождающими один и тот же двусторонний идеал частичной полугруппы булевых матриц всевозможных конечных размеров.

Теорема 2.8.1. Существует квадратная $n \times n$-матрица с ненулевым определителем, принадлежащая некоторому ε_J-классу, тогда и только тогда, когда столбцовый, строчный, факторизационный и минорный ранги любой матрицы этого же ε_J-класса равны между собой и равны n. Определители всех матриц того же размера $n \times n$ равны, а определители квадратных матриц, принадлежащие этому же ε_J-класс, но большего чем $n \times n$ размера, равны нулю.

Условия разрешимости неравенства вида $XA \supseteq B$ или $AX \supseteq B$ обсуждаются в параграфе 2. 9. Здесь доказывается теорема Люца [3] :

Теорема 2.9.1. Пусть A и B булевы матрицы одного и того же порядка. Если существует матрица C такая, что $C \subseteq A$ и $B \subseteq CI$, здесь I – квадратная матрица, все элементы которой являются единицами исходной булевой алгебры. Тогда

а) неравенство $AX \supseteq B$ имеет решение;

б) множество решений неравенства $AX \supseteq B$ содержит все матрицы X, удовлетворяющие условию $X \supseteq C^T B$.

Также приводятся теоремы, указывающие достаточные условия разрешимости простейших булевых неравенств в терминах минорно-ранговых функций, полученные Поплавским [4] [5]. Один из таких примеров даёт следующая теорема.

Теорема 2.9.4. Пусть даны булева матрица A размера $m \times n$ и B — столбец размера $m \times 1$ с элементами из булевой алгебры $\mathbf{B_2} = \{0, 1\}$. Если столбец B не увеличивает ранга матрицы A при

---

[3] Luce R.D. A note on Boolean matrix theory// Proc. Am. Math. Soc. 1952. 3. P.382—388.

[4] Поплавский В.Б. Минорный ранг, нули определителя булевой матрицы и их приложения// Дискретная математика. 2011.23:3. С. 93-119.

[5] Поплавский В.Б. Булевы матрицы и определители./ В.Б. Поплавский. LAP Lambert Academic Publishing KG. 2011.

приписывании его к столбцам матрицы A, то матричное неравенство

$$B \subseteq AX,$$

где X — столбец неизвестных, имеет решение.

Мы доказываем, что условия совместности Люца для неравенств вида $XA \supseteq B$ или $AX \supseteq B$ в теореме 2.9.1 в случае булевой алгебры $\mathbf{B_2} = \{0,1\}$ являются частным случаем условия разрешимости Поплавского, сформулированного для таких неравенств в терминах минорно-ранговых функций в теореме 2.9.4. Это является основным результатом второй главы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Магистерская работа посвящена алгебре булевых матриц с различными операциями над булевыми матрицами. Изучены свойства этих операций. Рассмотрены проблемы обратимости булевых матриц, разрешимости линейных матричных уравнений и неравенств. На множестве булевых матриц всевозможных размеров с частичной операцией умножения, используя понятия главных идеалов полученной полугруппы, рассмотрены классы эквивалентностей Грина. Определение и построение инвариантов этих классов в форме ранговых функций, изучение свойств и связей ранговых функций являлись главной задачей этой работы. Рассмотрены многочисленные ранговые функции на множестве булевых матриц всевозможных конечных размеров с элементами из произвольной булевой алгебры. Были даны определения столбцовых, строчных, факторизационных рангов, а с помощью понятий определителя и перманента булевой матрицы были введены минорный и перманентный ранги булевой матрицы. Было показано, что столбцовые, строчные, факторизационные и минорные ранги являются инвариантами на каждом J-классе полугруппы булевых матриц с частичной операцией умножения и то, что минорные ранги не превосходят столбцовые, строчные, факторизационные и перманентные ранги. Приведены многочисленные примеры с расчетами, подтверждающими соответствующие утверждения.

В качестве приложений ранговых функций булево-матричного анализа, был рассмотрен вопрос совместности простейших булевых уравнений и неравенств. В частности, была показана большая эффективность критерия совместности для неравенств вида $XA \supseteq B$ или $AX \supseteq B$ в терминах минорно-ранговых функций (критерий Поплавского) по отношению к аналитическим условиям совместности Люца для этих неравенств в случае булевой алгебры $\mathbf{B_2} = \{0, 1\}$. Это является основным и оригинальным результатом данной выпускной квалификационной работы.