МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики

Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Гарнушкиной Екатерины Константиновны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент ____________ Корнев В. В.

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ____________ Хромов А. П.

Саратов 2020

Введение.

Современные исследования уравнений с различными видами инволюций, продемонстрированные работами Т. Карлемана, И.Г. Петровского, Ч. Данкля, привели к большому количеству результатов: изучены вопросы корректности постановок задач, качественные свойства решений, разрешимость как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений в частных производных, спектральные задачи.

Уравнения с инволюцией замечательны уже тем, что имеют тесную связь с двумя важными классическими уравнениями: уравнением Штурма-Лиувилля и уравнением Дирака. Так, простейшее уравнение вида

$$y'(x) + p(x)y(1-x) = \lambda y(x),\ x[0;1],$$

в классе непрерывно - дифференцируемых функций эквивалентно хорошо известной системе Дирака с необходимым условием совпадения компонент в точке $x = 1/2$.

Актуальность и научная новизна работы заключается в том, что впервые получены уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций с инволюцией в случае дифференцируемого потенциала с привлечением приема в исследовании соответствующей системы (системы Дирака).

Другим важным приложением функционально-дифференциальных операторов с инволюцией является изучение новых свойств хорошо известной системы Дирака:

$$Bz'(x) + Q(x)z(x) = \lambda z(x),\ z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T,$$

где $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$ (T — знак транспонирования).

Несмотря на то, что это простейшая система всего лишь двух уравнений, она достаточно сложна в исследовании, и вызывает интерес своими приложениями.

Наиболее важными приложениями спектральных свойств изучаемых операторов являются существенные продвижения в обосновании метода Фурье для смешанных задач. Традиционно обоснование метода Фурье опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, полученных его почленным дифференцированием нужное число раз, что приводит к завышенным требованиям гладкости начальных данных задачи. Способ исследования гладкости суммы ряда, не прибегая к почленному дифференцированию, был предложен А.Н. Крыловым.

В данной работе поставлена цель рассмотреть смешанную задачу для уравнения первого порядка с инволютивным отклонением, заданную на отрезке. Также исследовать смешанную задачу для простейшей системы из двух уравнений первого порядка (спектральная задача для которой приводит к системе Дирака). Применяя идеи А.Н. Крылова по ускорению сходимости рядов, найти уточненные асимптотики собственных значений и собственных функций соответствующих операторов, получить классические решения при минимальных условиях гладкости начальных данных.

Основная часть данной работы состоит из четырёх разделов. Первый раздел: "Однородное волновое уравнение". Второй раздел: "Метод Фурье". Третий раздел: "Смешанная задача с инволюцией". Четвертый раздел: "Практическая часть".

Основное содержание работы

В ведении обосновывается актуальность темы магистерской работы, формулируется цель работы и задачи необходимые для достижения поставленной цели.

Основная часть состоит из 4 разделов.

В первом разделе рассмотрена начально-краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, описывающего малые поперечные колебания струны. Для решения поставленной начально-краевой задачи применен метод разделения переменных.

Струна рассматривается как гибкая упругая нить. Если колебаний нет, то струна занимает отрезок $[0, l]$ на оси x. Колебания струны происходят в плоскости (x, u) и описываются функцией $u = u(x, t),\ t \geqslant 0$ – время. В случае отсутствия внешних сил уравнение имеет следующий вид (так называемое однородное волновое уравнение):

$$\rho(x)u_{tt} = C_0 u_{xx} \tag{1.1}$$

(u_{tt} и u_{xx} - частные производные второго порядка по t и x соответственно).

Для однозначного определения решения требуется задать начальные условия

$$u(x,0) = \phi(x);\ u_t(x,0) = \psi(x); \tag{1.2}$$

($\phi(x)$ - начальное смещение, $\psi(x)$ - начальная скорость) и граничные условия)

$$u(0,t) = 0;\ u(l,t) = 0 \tag{1.3}$$

(такие условия называются однородными граничными условиями первого рода).

Эта задача является частным случаем задачи Штурма-Лиувилля. Выпишем решение в простейшем случае $\rho(x) = \rho_0 = const$. Обозначив $\frac{C_0}{\rho_0} = a^2$, после разделения переменных получим уравнение

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2T(t)} = -\lambda$$

и краевую задачу на собственные значения и собственные функции для $X(x)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0;\ X(0) = 0,\ X(l) = 0.$$

Итак, будем искать собственные значения только среди положительных λ. Общее решение уравнения в этом случае имеет вид $X(x) = C_1\sin(x\sqrt{\lambda}) + C_2\cos(x)\sqrt{\lambda}$. Подставляя это выражение в первое граничное условие, найдем $C_2 = 0$. Подставляя его же во второе граничное условие и сокращая на $C_1 = 0$ (заметим, что $C_1 \neq 0$, т.к. мы ищем нетривиальное решение), получаем уравнение для собственных значений: $\sin(l\sqrt{\lambda}) = 0$. Отсюда собственные значения $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 1, 2, ...$, а собственные функции $X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$.

Решение начально-краевой задачи ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(An\cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at \right) \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

т.е. в виде ряда Фурье по собственным функциям $X_n(x)$ с коэффициентами Фурье $T_n(t)$ (именно поэтому метод разделения переменных называют также методом Фурье). Каждый член ряда удовлетворяет как уравнению, так и однородным граничным условиям первого рода и представляет собой стоячую волну. Поэтому, если можно менять местами дифференцирование и суммирование, то записанный ряд удовлетворяет как уравнению, так и граничным условиям.

Рассмотренная задача на собственные значения и собственные функции является частным случаем задачи Штурма-Лиувилля.

Во втором разделе рассмотрен прием А. Н. Крылова на примере ряда Фурье:

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx, \;\; x \in [0, \pi] \tag{2.11}$$

и исследован вопрос о гладкости суммы этого ряда. В общем случае при отсутствии информации, кроме той, что α_n есть коэффициенты Фурье, ничего сказать нельзя. Если нам известно, что исходная функция гладкая, кусочно-гладкая и т. п., то можно получить интегрированием по частям асимптотику коэффициентов Фурье, причем главные части асимптотики получаются за счет точек разрыва функции, следующие — за счет разрыва производных и т. д.

Рассмотрим обратную задача: по асимптотике коэффициентов Фурье получить информацию о гладкости функции.

Пусть, например, $\alpha_n = \frac{1}{n} + \frac{\alpha_n}{n^2}$, где через α_n обозначены любые числа, удовлетворяющие условию $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$. Разобьем теперь ряд на два ряда:

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum \frac{1}{n}\sin nx, \;\; \Sigma_2 = \sum \frac{\alpha_n}{n^2}\sin nx.$$

Тогда можно утверждать следующее: ряд Σ_2 и соответствующий ему почленно дифференцированный ряд сходятся абсолютно и равномерно (из-за сходимости ряда $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ по неравенству Коши – Буняковского); ряд же Σ_1 имеет сумму, равную $\pi - x$ при $x \in [0, \pi]$. Значит, мы получаем информацию о гладкости суммы ряда (0.11) без его почленного дифференцирования. Если же $\alpha_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha_n}{n^3}$, то получаем информацию о гладкости производной от суммы ряда и т. д.

Таким образом, можно узнать информацию о гладкости ряда (2.11) путем его расщепления на два, один из которых точно вычисляется, а другой можно почленно дифференцировать нужное число раз. О данном способе А. Н. Крылов сказал следующее: «Этот прием не только дает практическую возможность с удобством пользоваться такими рядами в приложениях, получая желаемую степень точности, взяв самое ограниченное число (3-5) членов преобразованного ряда, но часто приводит к представлению суммы предложенного ряда в замкнутой форме под видом разрывной функции. Этот же прием дает возможность находить производные от функций, представленных такими рядами Фурье, почленное дифференцирование которых недопустимо».

Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, полученных его почленным дифференцированием нужное число раз.

Указанная выше идея просматривается уже в задаче колебания струны. Именно, исходя из формального решения (это не ряд Фурье) мы представляем его в виде суммы двух рядов Фурье с коэффициентами, выражающимися через исходные данные, и нужную информацию о гладкости мы получаем из структуры решения, не прибегая к почленному дифференцированию формального ряда.

В исследованиях метода Фурье можно сказать, что прием А. Н. Крылова является ключом к изучению смешанной задачи. В самом деле, формальное разложение решения по методу Фурье включает и собственные значения, и собственные функции соответствующих спектральных задач. Используя асимптотику собственных значений и собственных функций, можно попытаться вместо почленного дифференцирования формальных разложений разбить их на части, такие, что одни, более простые по структуре, но медленно сходящиеся, можно изучать, минуя почленное дифференцирование, а другие, быстро убывающие, уже можно изучать, используя почленное дифференцирование.

Лишь в 80-х гг. прошлого века В. А. Чернятин предпринял такую попытку изучения формальных разложений по методу Фурье и успешно изучил ряд смешанных задач. В результате требования гладкости исходных данных уже становятся минимальными.

Рассмотрена теорема В.А. Чернятина.

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t) \tag{2.12}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{2.13}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0, \tag{2.14}$$

где $q(x) \in C[0,\pi]$ и вещественна.

Под классическим решением задачи (2.12)–(2.14) понимаем функцию $u(x,t)$, дважды непрерывно дифференцируемую по x и t при $x \in [0,\pi],\ t \in (-\infty,+\infty)$ и удовлетворяющую (2.12)–(2.14).

Естественные минимальные требования на $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) \in C^2[0,\pi],\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0 \tag{2.15}$$

(условия $\varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$ следуют из (2.12)).

Будем искать классическое решение задачи (2.12)–(2.14) по методу Фурье при условиях (2.15). Формальное решение по методу Фурье есть:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)(x)cos\sqrt{\lambda}td\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r}(\varphi,\varphi_n)\varphi_n(x)cos\sqrt{\lambda_n}t \tag{2.16}$$

где R_λ — резольвента оператора $L : Ly = -y'' + q(x)y,\ y(0) = y(\pi) = 0, \lambda_n$ — собственные значения оператора L, а $\varphi_n(x)$ — соответствующие собственные функции, для которых $||\varphi_n|| = 1(||\cdot|| — \text{норма в } L_2[0,\pi]), r > 0$ фиксировано.

Лемма 2.9. Для формального решения (2.16) имеет место формула

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{2.31}$$

где $u_0(x,t)$ из леммы 2.8

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)(x)\cos\sqrt{\lambda}td\lambda - \frac{2}{\pi}\sum_{n^2\leqslant r}\frac{(g,\sin nx)}{n^2}\sin nx\cos nt,$$

$$u_2(x,t) = \sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{1}{\lambda_n}(g,\varphi_n)\varphi_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}t - \frac{(g,\varphi_n^0)}{n^2}\varphi_n^0(x)\cos nt\right].$$

Таким образом, (2.31) и есть реализация рекомендаций А. Н. Крылова по усилению быстроты сходимости рядов Фурье и им подобных: ряд $u_2(x,t)$ имеет ускоренную сходимость, и его можно почленно дифференцировать два раза, $u_0(x,t)$ дважды дифференцируема по x и t как решение уравнения струны, $u_1(x,t)$ дважды дифференцируемая как конечная сумма. Тем самым решен важный вопрос о гладкости формального решения при минимальных условиях на $\varphi(x)$.

В третьем разделе рассмотрена и решена методом Фурье следующая смешанная задача с инволюцией:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + q(x)u(1-x,t), \qquad x\in[0,1] \qquad t\in(-\infty,\infty), \tag{3.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{3.3}$$

где $q(x)$ - комплекснозначная функция из $C^1[0,1]$ такая, что $q(0) = q(1)$, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет естественным минимальным требованиям: $\varphi(x)\in C^1[0,1], \varphi(0)=\varphi(1), \varphi'(0)=\varphi'(1)$.

Получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций спектральной задачи.

Введем оператор L:

$$Ly = l[y] = y'(x) + q(x)y(1-x), \qquad y(0) = y(1).$$

Рассмотрим соответствующую спектральную задачу $Ly = \lambda(y)$:

$$y'(x) + q(x)y(1-x) = \lambda y(x), \tag{3.4}$$

$$y(0) = y(1). \tag{3.5}$$

Осуществим переход от системы (3.4)-(3.5) к системе Дирака. Положим $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T - знак транспонирования) и рассмотрим систему

$$Bz'(x)P(x)z(x) = \lambda z(x), \tag{3.6}$$

где $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(1-x) & 0 \end{pmatrix}$, $z_1(x) = z_2(1-x)$.

Получим асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора L.

Теорема 3.3. Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые и для них справедливы асимптотические формулы:

$$\lambda_n = 2n\pi i + O\left(\frac{1}{n}\right),\ n = \pm n_0, \pm(n_0+1), ...,$$

где n_0 — некоторое достаточно большое натуральное число.

Лемма 3.4. При $\lambda = \lambda_n$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$u_{11}(0) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad u_{12}(0) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n},$$

$$u_{22}(0) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad u_{21}(0) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_{11}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\alpha_n}{n}, \qquad u_{11}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n},$$

$$u_{22}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad u_{22}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}.$$

Теорема 3.4. Для собственных значений λ_n имеют место уточненные асимптотические формулы:

$$\lambda_n = 2n\pi i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \qquad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots .$$

Далее, для собственных функций получим сначала грубую асимптотику.

Теорема 3.5. Для собственных функций оператора L имеют место асимптотические формулы:

$$y_n(x) = e^{2n\pi ix} + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), ...,$$

где оценка $O(\cdot)$ равномерна по $x \in [0,1]$.

Теперь получим уточненные формулы для собственных функций.

Теорема 3.6. Для собственных функций $y_n(x)$ оператора L имеют место уточненные асимптотические формулы:

$$y_n(x) = e^{2n\pi ix} + \Omega_{1n}(x) + \Omega_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$\Omega_{1n}(x) = \frac{1}{n}[b(x)e^{-2n\pi ix} + b(x)e^{2n\pi ix} + b(x)\alpha_n e^{-2n\pi ix} + b(x)\alpha_n e^{2n\pi ix}],$$

$$\Omega_{2n}(x) = \frac{1}{n}[b(x)\int_0^x e^{2n\pi it} q_2'\left(\frac{x-t}{2}\right)dt + b(x)\int_0^x e^{-2n\pi it} q_2'\left(\frac{x+t}{2}\right)dt],$$

оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in [0,1]$, а через $b(x)$ обозначаем различные непрерывные функции из некоторого конечного набора.

Получено классическое решение задачи при минимальных требованиях на $\varphi(x)$, избегая исследования равномерной сходимости почленно продифференцированного формального решения по методу Фурье.

По методу Фурье формальное решение задачи (3.1)–(3.3) имеет вид

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda\varphi)(x)e^{\lambda t}d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} \frac{(\varphi, z_{-n})}{(y_n, z_{-n})} y_n(x)e^{\lambda_n t}, \tag{3.23}$$

где $r > 0$ фиксировано и таково, что при $|\lambda_n| > r$ все собственные значения простые.

Доказан основной результат сформулированный теоремой 3.13.

Теорема 3.13. Если $q(x) \in C^1[0,1]$, $q(0) = q(1)$, $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, то классическое решение задачи (3.1)–(3.3) существует и имеет вид (3.23).

В четвёртом разделе построены анимационные картины, соответствующие уравнению колебания струны с закрепленными концами.

Физический смысл уравнения колебания струны можно понять, используя математический пакет Maple, встроенные графические возможности которого позволяют «увидеть» процесс колебаний струны.

Maple — программный пакет, система компьютерной математики. Является продуктом компании Waterloo Maple Inc., которая с 1984 года выпускает программные продукты, ориентированные на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование. Система Maple предназначена для символьных вычислений, хотя имеет ряд средств и для численного решения дифференциальных уравнений и нахождения интегралов. Обладает развитыми графическими средствами. Имеет собственный интерпретируемый язык программирования,

Пакет Maple представляет собой весьма разветвленную систему, содержащую огромное количество встроенных функций и команд. Применяя широкие возможности программировать в Maple, можно создавать пакеты процедур, направленные на выполнение сложных научно-технических задач с использованием встроенных функций и объектно-ориентированного подхода в программировании.

Заключение

В работе получены уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи, на основе которых проводится обоснование применения метода Фурье. Использованы приемы, позволяющие избежать исследования равномерной сходимости почленно продифференцированного формального решения по методу Фурье и получить классическое решение при минимальных требованиях на начальные данные задачи.