МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра дифференциальных уравнении
и математической экономики

# ВНЕШНЯЯ И ВНУТРЕННЯЯ ОЦЕНКА ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ЛЕБЕГОВЫМ МНОЖЕСТВОМ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ

АВТОРЕФЕРАТ НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

аспиранта 4 года обучения
направление 01.06.01 — Математика и механика
направленность «Дискретная математика и математическая кибернетика»
Абрамовой Вероники Валерьевны

Научный руководитель
профессор, д.ф-м.н, профессор ______________________ С. И. Дудов

Зав. кафедрой
д.ф-м.н, профессор ______________________ С. И. Дудов

Саратов – 2020 год

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы

Рассматриваемые в выпускной квалификационной работе задачи исследовались методами и средствами негладкого анализа. Негладкий анализ и недифференцируемая оптимизация развивались в работах Р.Т. Рокафеллара, Б.Н. Пшеничного, В.Ф. Демьянова, А.М. Рубинова, Б.Т. Поляка, Ф. Кларка, Ж.–П. Обена, И. Экланда, Ж.Б. Ириарт–Уррути, Ж.–Ф. Виаля, Е.С. Половинкина, Г.Е. Иванова и других отечественных и зарубежных математиков.

Оценка и аппроксимация достаточно сложных множеств множествами простой структуры – одно из актуальных направлений негладкого анализа. Такие задачи имеют обширные приложения в естественных науках, в том числе и в самой математике. Известны многочисленные работы связанные с внешними и внутренними оценками множеств и многозначных отображений соответственно эллипсоидами и многозначными отображениями с эллипсоидальными значениями. Много работ посвящено оценкам множеств многогранниками.

Задача о чебышевском центре множества и задача о шаре наибольшего радиуса, вложенного в заданное множество, так же относятся к задачам данного типа. Ряд задач по шаровым оценкам выпуклых компактов рассматривался в работах ([4]–[8]).

Здесь следует так же отметить давний интерес математиков к оценкам и приближению выпуклого компакта шаром (см., например, монографии В.Бляшке [1], Т.Боннезена и В.Фенхеля [2], Л.Ф.Тота [9]).

Важная особенность задач по оценке и приближению множеств и многозначных отображений заключается в том, что их математическая формализация приводит к минимаксным задачам с распадающимися или связанными переменными.

Надо сказать, что теория минимаксных задач, как один из наиболее сложившихся разделов негладкого анализа, прошла значительный путь развития. Одна из ее первых задач, задача о наилучшем равномерном приближений функции многочленами, была поставлена еще П.Л. Чебышевым. Работы Валле–Пуссена, Н.Г. Чеботарева, Е.Я. Ремеза, С.И. Зуховицкого, В.Ф. Демьянова, В.Н. Малоземова, Дж. Данскина, Ю.Б. Гермейера, В.В. Федорова, А.Г. Сухарева и других специалистов во многом предопределили сегодняшнее состояние теории минимакса.

Многие задачи по оценке сложных множеств множествами простой геометрической структуры обладают интересной спецификой, выделяющей их из прочих минимаксных задач. А именно, они имеют вид:

$$\varphi(x) \equiv \min_{y\in\Omega} f(x-y) \to \max_{x\in D}, \tag{1}$$

то есть сводятся к отысканию максимина функции разности аргументов. Отметим, что некоторые задачи проектирования технических устройств по критериям стоимости и качества, так же сводятся к задачам вида (1). Задачи такого вида изучались в работах С.И. Дудова. В [4] им получены необходимые и достаточные условия решения задачи (1), при условии дифференцируемости по направлениям функции $f(\cdot)$ и тех функции, которыми (в виде лебеговых множеств) задаются множества $\Omega$ и $D$. Кроме того, в работах [4] – [6] им изучались дифференциальные свойства функции расстояния от точки до множества в произвольной норме, то есть целевой функции $\varphi(x)$ задачи (1) в случае, когда функция $f(x)$ удовлетворяет аксиомам нормы.

В данной работе для более детального исследования выделены следующие задачи.

1) Задача о внешней оценке компакта лебеговым множеством выпуклой функции. Под ней далее понимается конечномерная задача о вложении заданного компакта $D$ из вещественного пространства $\mathbb{R}^p$ в нижнее лебегово множество $G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \le \alpha\}$ выпуклой функции $f(\cdot)$ с наименьшим значением $\alpha$ за счет смещения $D$ по координатным осям (то есть без вращения). Она сводится к задаче

$$\varphi(x) \equiv \max_{y\in D} f(x-y) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}. \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что она является обобщением задачи о чебышевском центре множества (случай, когда $f(\cdot)$ – некоторая норма на $\mathbb{R}^p$). С другой стороны, эта задача имеет технические приложения. В частности к ней сводится так называемая задача о постоянных допусках на параметры проектируемого устройства, когда компакт $D$ отражает точностные возможности оборудования, используемого при изготовлении устройства, а функция $f(\cdot)$ – качественные характеристики устройства.

2) Задача о внутренней оценке выпуклого тела лебеговым множеством выпуклой функции.

Под ней будем понимать конечномерную задачу о вложении наибольшего по включению нижнего лебегова множества выпуклой функции $f(\cdot)$ в заданное выпуклое тело $D \subset \mathbb{R}^p$. Она сводится к задаче

$$\psi(x) \equiv \min_{y\in\Omega} f(x-y) \to \max_{x\in D}, \tag{3}$$

где $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \backslash D}$. Она является обобщением задачи о вписанном шаре (случай, когда $f(\cdot)$ – некоторая норма на $\mathbb{R}^p$, то есть когда надо вложить в тело $D$ шар нормы с наибольшим радиусом. Эта задача так же имеет технические приложения.

3) Отметим так же следующее обстоятельство. Важным инструментом исследования свойств решения и разработки численных методов решения задачи (3) является функция

$$\rho(x, \Omega) = \min_{y \in \Omega} k(y - x), \tag{4}$$

где $k(x) = \inf\{\alpha \geq 0 : \alpha x \in M\}$ – функция Минковского (калибр) выпуклого тела $M$ (с поглощающим свойством: $0_p \in intM$). Эта функция выражает расстояние от точки $x$ до замкнутого множества $\Omega$ в «несимметричном» пространстве, в котором роль нормы играет функция $k(\cdot)$. Ее свойства так же представляют объект исследования.

**Цели и задачи выпускной квалификационной работы**

- исследование свойств функции расстояния (4);
- получение необходимых и достаточных условий решения задач (2) и (3);
- разработка подходов к приближенному решению задач (2) и (3).

**Методология и методы исследования**

В работе используются методы выпуклого, сильно выпуклого, слабо выпуклого анализа, а так же методы теории минимаксных задач.

**Научная новизна и положения выносимые на защиту**

Результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1. Установлены свойства функции расстояния (4) для случаев, когда множество $\Omega$ является строго, сильно или слабо выпуклым.

2. Получены необходимые и достаточные условия решения задач (2) и (3).

3. Предложен подход к приближенному решению задачи (2), дано обоснование сходимости соответствующего итерационного процесса.

4. Разработан численный метод решения задачи (3) в случае, когда ее целевой функцией является функция расстояния (4).

**Теоретическая ценность и практическая значимость**

Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы в выпуклом, сильно выпуклом и слабо выпуклом анализе при исследовании задач по оценке множеств и многозначных отображений и других задач, возникающих в негладком анализе, а так же в учебном процессе.

**Степень достоверности и апробация результатов**

Достоверность результатов обоснована теоретическими выкладками и строгими доказательствами, опирающимися на методы теории минимаксных задач, сильно и слабо выпуклого анализа.

Основные результаты научно – квалификационной работы докладывались на научных конференциях сотрудников механико-математического факультета Саратовского национального исследовательского университета (2016-2019 гг); на 18-ой, 19-ой и 20-ой Саратовских зимних школах «Современные проблемы теории функции и их приближения», на 13-ой международной Казанской летней научной школе-конференции «Теория функции, ее приложения и смежные вопросы».

Результаты исследования опубликованы в 12 работах. Работы [3], [8], [10], [11] опубликованы в изданиях, входящих в научную базу «Web of Science» или «Scopus».

**Структура и объем работы**

Научно – квалификационная работа состоит из введения, трех разделов, заключения и списка литературы из 43 наименовании. Текст работы занимает 86 страниц.

## Основное содержание работы

**Первый раздел** посвящен исследованию свойств функции расстояния (4) от точки до множества в несимметричном пространстве, в нем семь подразделов. В **первых двух подразделах** дается введение и краткий обзор некоторых известных результатов по исследованию свойств обычной функции расстояния (то есть в симметричном пространстве), обобщение которых, в частности, предстоит далее получить. В **третьем подразделе** получены некоторые свойства калибровочной функции (функции Минковского)

$$k(x) = \inf\{\alpha \geq 0 : \alpha x \in M\},$$

порожденной строго и сильно выпуклым телом $M$ с поглощающим свойством: $0_p \in intM$. Напомним определение сильно выпуклого множества.

**Определение 1.** ([8]) Множество $M$ называется $r$ – сильно выпуклым, если оно представимо в виде пересечения замкнутых евклидовых шаров одного радиуса $r > 0$, то есть имеет вид

$$M = \bigcap_{a \in A} B(a, r), \tag{5}$$

где $B(a, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : ||a - y|| \leq r\}$.

Наиболее интересным здесь является следующее свойство.

**Лемма 1.3.3.** *Пусть множество $M$ является еще и $r$ -сильно выпуклым. Тогда для любых точек $x_0 \neq 0, x_1 \neq 0$ и числа $\alpha \in [0, 1]$ справедливо неравенство*

$$k((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) \leq (1-\alpha)k(x_0) + \alpha k(x_1) -$$
$$- \frac{\alpha(1-\alpha)k(x_0)k(x_1)}{2r\, R_M\,((1-\alpha)k(x_0) + \alpha k(x_1))} \left|\left| \frac{x_0}{k(x_0)} - \frac{x_1}{k(x_1)} \right|\right|^2.$$

*Здесь $R_M > 0$ такое, что $M \subset B(0_p, R_M)$.*

Кроме того, получена явная формула калибровочной функции для сильно выпуклого образующего множества.

**Лемма 1.3.5.** *Пусть множество $M$ является $r$-сильно выпуклым и представлено в виде (5). Тогда для любого $x$ калибр можно выразить формулой*

$$k(x) = \sup_{a \in A} \frac{\|x\|^2}{\langle a, x\rangle + \sqrt{\langle a, x\rangle^2 + \|x\|^2(r^2 - \|a\|^2)}}.$$

В **четвертом подразделе** изучаются свойства нижних лебеговых множеств функции расстояния для случаев, когда расстояние измеряется до строго, сильно или слабо выпуклых множеств. Эти свойства опираются на представление множества

$$\Omega(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^p : \rho(x, \Omega) \leq \lambda\}$$

в виде $\Omega(\lambda) = \Omega + \lambda M$ (лемма 1.4.1) и включают следующие результаты.

**Теорема 1.4.1.** *Если $\Omega$ и $M$ являются строго (соответственно, $r_1$- сильно и $r_2$− сильно) выпуклыми множествами, то для любого $\lambda \geq 0$ множество $\Omega(\lambda)$ является строго ($(r_1 + \lambda r_2)$− сильно) выпуклым.*

**Теорема 1.4.2.** *Пусть $M$ - выпуклое замкнутое ограниченное множество (причем $0 \in \operatorname{int} M$), $\Omega$ - выпуклое замкнутое множество, $\lambda > 0$.*

*1) Если соответствующее множество $\Omega(\lambda)$ является строго выпуклым, то исходное множество $\Omega$ так же является строго выпуклым.*

*2) Если множество $\Omega(\lambda)$ является строго выпуклым, а $\Omega$ - ограниченным, то множества $\Omega$ и $M$ так же являются строго выпуклыми.*

*3) Если множество $\Omega(\lambda)$ является $r$-сильно выпуклым, то множества $\Omega$ и $M$ являются соответственно $r-$ и $r/\lambda-$ сильно выпуклыми.*

**Теорема 1.4.3.** *Если множество $\Omega$ является $r_1-$слабо выпуклым по Виалю, а множество $M$ является $r_2-$сильно выпуклым, то при любом $\lambda : 0 \leq \lambda < \frac{r_1}{r_2}$ множество $\Omega(\lambda)$ будет $(r_1 - \lambda r_2)$-слабо выпуклым по Виалю.*

Отметим, что слабо выпуклое множество понимаем в смысле следующего определения ([7]).

**Определение 2.** Множество $A \subset \mathbb{R}^p$ называется слабо выпуклым (по Виалю) с константой $r > 0$ ($r$ – слабо выпуклым), если для любых точек $x_0, x_1 \in A$ таких, что $0 < ||x_0 - x_1|| < 2r$, существует точка $x \in A \bigcap D_r(x_0, x_1)$, не совпадающая с точками $x_0$ и $x_1$.

В **пятом подразделе** рассматривается поведение функции расстояния на отрезках для различных сочетании требований на множество, порождающего калибровочную функцию и множество, до которого измеряется расстояние.

**Теорема 1.5.1.** *Пусть множество $\Omega$ и компакт $M$ являются строго выпуклыми. Если точки $x_0$ и $x_1$ удовлетворяют неравенству*

$$\rho(x_0, \Omega) \leq \rho(x_1, \Omega) < \rho(x_0, \Omega) + k(x_1 - x_0),$$

*причем, $x_1 \notin \Omega$, то для любых $\alpha \in (0, 1)$ выполняется*

$$\rho((1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1) < (1 - \alpha)\rho(x_0, \Omega) + \alpha\rho(x_1, \Omega).$$

**Теорема 1.5.2.** *Пусть $\Omega$ и $M$ являются соответственно $r_1-$ и $r_2-$ сильно выпуклыми множествами, а точки $x_0$ и $x_1$ таковы, что $[x_0, x_1] \bigcap \Omega = \emptyset$. Тогда для любого $\alpha \in [0, 1]$ и точек $y_0$ и $y_1$, являющихся соответственно проекциями точек $x_0$ и $x_1$ на множество $\Omega$, выполняется неравенство*

$$\rho((1-\alpha)x_0+\alpha x_1) \le (1-\alpha)\rho(x_0,\Omega)+\alpha\rho(x_1,\Omega)-$$
$$\frac{\alpha(1-\alpha)}{2R_M}\Big[\frac{||y_0-y_1||^2}{r_1}+$$
$$\frac{\rho(x_0,\Omega)\rho(x_1,\Omega)}{r_2((1-\alpha)\rho(x_0,\Omega)+\alpha\rho(x_1,\Omega))}\Big|\Big|\frac{x_0-y_0}{\rho(x_0,\Omega)}-\frac{x_1-y_1}{\rho(x_1,\Omega)}\Big|\Big|^2\Big].$$

**Теорема 1.5.6.** *Пусть* $\Omega$ – $r_1$*-слабо выпуклое множество,* $M$–$r_2$*-сильно выпуклое, точки* $x_0, x_1$ *такие, что* $\rho(x_0,\Omega)=\rho(x_1,\Omega)=\rho\ge 0$*, причем* $r_1-\rho r_2>0$*. Тогда для* $\alpha\in[0,1]$ *выполняется неравенство*

$$\rho((1-\alpha)x_0+\alpha x_1,\Omega)\le\rho+\alpha(1-\alpha)\frac{||x_0-x_1||^2}{r_M(r_1-\rho r_2)}.$$

**Теорема 1.5.7.** *Пусть* $\Omega$ – $r$*-слабо выпуклое по Виалю множество, а точки* $x_0, x_1 \notin \Omega$ *такие, что*

$$||x_0-x_1||<2r-R_M(\rho(x_0,\Omega)+\rho(x_1,\Omega)).$$

*Тогда для любого* $\alpha\in[0,1]$ *и любых точек* $y_0\in P_\Omega(x_0),\ y_1\in P_\Omega(x_1)$ *выполняется неравенство*

$$\rho((1-\alpha)x_0+\alpha x_1,\Omega)\le(1-\alpha)\rho(x_0,\Omega)+\alpha\rho(x_1,\Omega)+$$
$$+\frac{\alpha(1-\alpha)}{r_M r}||y_0-y_1||^2.$$

Здесь $P_\Omega(x)=\{y\in\Omega:\rho(x,\Omega)=k(x-y)\}$ – проекция точки $x$ на множество $\Omega$.

В **шестом подразделе** показано, что функция расстояния до выпуклого множества является выпуклой на $\mathbb{R}^p$, получена формула ее субдифференциала, обобщающая соответствующую формулу для случая симметричного пространства.

**Теорема 1.6.2.** *Если* $\Omega$ *– выпуклое замкнутое множество из* $\mathbb{R}^p$*, то функция расстояния (1.1.2), заданная калибром (1.1.1), является выпуклой на* $\mathbb{R}^p$ *функцией. Ее субдифференциал в любой точке* $x\in\mathbb{R}^p$ *можно выразить в виде*

$$\underline{\partial}\rho(x,\Omega)=\underline{\partial}k(x-z)\bigcap -K^+(z,\Omega),$$

*где* $z$ *– любая точка из* $P_\Omega(x)$*.*

Даются приложения этого результата для случая, когда множество $\Omega$ и выпуклое тело $M$ задаются в виде лебеговых множеств выпуклых функций.

**Следствие 1.6.1.** *Пусть выпуклое множество $\Omega$ и выпуклый компакт $M$ заданы в виде*

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \leq 0\}, \; M = \{y \in \mathbb{R}^p : h(y) \leq 0\}.$$

*Здесь $f(\cdot)$ и $h(\cdot)$ – выпуклые конечные на $\mathbb{R}^p$ функции, причем $h(0_p) < 0$ и существует точка $\hat{y}$, в которой $f(\hat{y}) < 0$. Тогда справедлива формула*

$$\underline{\partial}\rho(x, \Omega) = \begin{cases} 0_p, \textit{если } f(x) < 0, \\ \{v \in \mathbb{R}^p : s(v, M) \leq 1\} \bigcap \mathbb{K}(\underline{\partial} f(x)), \textit{если } f(x) = 0, \\ \{v \in \mathbb{R}^p : s(v, M) = 1\} \bigcap \mathbb{K}(\underline{\partial} h(\frac{x-z}{K(x-z)})) \bigcap \mathbb{K}(\underline{\partial} f(z)), \textit{если } f(x) > 0, \end{cases}$$

*где $z$ –любая точка из $P_\Omega(x)$.*

В **седьмом подразделе** получен критерий вогнутости функции расстояния в несимметричном пространстве, обобщающий соответствующий результат для случая симметричного пространства.

**Теорема 1.7.1.** *Для того, чтобы ФР была вогнутой на выпуклом множестве $D$, не содержащемся в $\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы $\Omega \bigcap riD = \emptyset$ и множество*

$$D_0 = \bigcup_{x \in D} V(x),$$

*где $V(x) = \{y \in \mathbb{R}^p | k(x - y) < \rho_\Omega(x)\}$, было выпукло.*

Во **втором разделе** рассматривается задача о внешней оценке компакта лебеговым множеством выпуклой функции. Он состоит из четырех подразделов.

В **первом подразделе** дается математическая формализация задачи в виде задачи отыскания минимакса от функции разности аргументов (2).

Во **втором подразделе** изучаются свойства целевой функции поставленной экстремальной задачи (2).

Основные свойства функции $\varphi(x)$ отражает

**Теорема 2.1.** *Пусть $f(x)$ является выпуклой конечной на $\mathbb{R}^p$ функцией. Тогда функция $\varphi(x)$ является 1) выпуклой конечной на $\mathbb{R}^p$ функцией, а её субдифференциал в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$ может быть выражен в виде*

$$\underline{\partial}\varphi(x) = -co\{\underline{\partial} f(z - x) : z \in Q^\varphi(x)\},$$

*где* $Q^\varphi(x) = \{z \in D : f(z - x) = \varphi(x)\}$;
*2) строго выпуклой, если функция* $f(\cdot)$ *строго выпукла на* $\mathbb{R}^p$;
*3) сильно выпуклой на* $\mathbb{R}^p$ *с константой* $C > 0$, *то есть для любых точек* $x_0$, $x_1$ *из* $\mathbb{R}^p$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ *выполняется*

$$\varphi((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) \leqslant (1-\alpha)\varphi(x_0) + \alpha\varphi(x_1) - \frac{C}{2}\alpha(1-\alpha)\|x_0 - x_1\|^2,$$

*если функция* $f(\cdot)$ *сильно выпукла на* $\mathbb{R}^p$ *с константой* $C$;
*4) строго квазивыпуклой, то есть для любых точек* $x_0 \neq x_1$ *из* $\mathbb{R}^p$ *и* $\alpha \in (0, 1)$ *выполняется*

$$\varphi((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) < \max\{\varphi(x_0), \varphi(x_1)\},$$

*если функция* $f(\cdot)$ *строго квазивыпукла на* $\mathbb{R}^p$.

Кроме того, установлены необходимые и достаточные условия решения этой задачи.

**Теорема 2.2.** *1)Для того, чтобы точка* $x^*$ *была точкой минимума функции* $\varphi(x)$ *на* $\mathbb{R}^p$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$0_p \in co\{\underline{\partial} f(z - x^*) : z \in Q^\varphi(x^*)\},$$

*где* $Q^\varphi(x^*) = \{z \in \Omega : \varphi(x^*) = f(z - x^*)\}$.

*2) Если существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$B(0_p, \delta) \subset co\{\underline{\partial} f(z - x^*) : z \in Q^\varphi(x^*)\},$$

*то* $x^*$ *является единственной точкой минимума функции* $\phi(x)$ *на* $\mathbb{R}^p$, *причём*

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(x^*) + \delta\|x - x^*\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p.$$

В **третьем подразделе**, в качестве вспомогательной при решении основной задачи (2), рассматривается задача о внешней оценке компакта лебеговым множеством калибровочной функции. Показано, что если порождающее калибровочную функцию множество является многогранником, то задача сводится к задаче линейного программирования (теорема 2.3). Так же доказано, что если $M$ является сильно выпуклым множеством, то функция $\varphi^2(x)$ является сильно выпуклой (теорема 2.4).

В **четвертом подразделе** предложен подход к получению приближенного решения задачи (2). Этот подход отражает

**Принципиальная схема метода**

Пусть $f(y_0) = \min\limits_{y \in \mathbb{R}^p} f(y)$. По исходному предположению $G(\alpha_0) \overset{*}{-} D = \emptyset$, где $\alpha_0 = f(y_0)$. Поэтому, в силу непрерывности выпуклой конечной функции $f(\cdot)$ выполняется $y_0 \in intG(\alpha)$ для любого $\alpha > \alpha_0$ (или $0_p \in int(G(\alpha) - y_0)$.

Последовательность приближений $\{x_i\}_{i=0,1,\ldots}$ строится следующим образом. Точка начального приближения $x_0$ выбирается произвольно. Предположим, уже получена точка $x_i$. Возьмем в качестве $M_i = G(\alpha_i) - y_0$, где $\alpha_i = \varphi(x_i)$. После этого решаем задачу

$$\varphi_i(x) \equiv \max_{y \in D - y_0} k(y - x, M_i) \to \min_{x \in \mathbb{R}^p}, \tag{6}$$

где $k(x, M_i) = \inf\{\alpha \geq 0 : \alpha x \in M_i\}$ – калибровочная функция множества $M_i$. В качестве $x_{i+1}$ берем одно из решений задачи (6). Если при этом окажется, что $\varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i)$, то это будет означать $\varphi(x_i) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^p} \varphi(x)$ и итерационный процесс на этом заканчивается. В противном случае, то есть при $\varphi(x_{i+1}) \neq \varphi(x_i)$ процесс построения последовательности продолжается.

Обозначим через $\rho(x, S^*) = \inf\limits_{y \in S^*} ||x - y||$ – расстояние от точки $x$ до множества решении задачи (2) $S^* = \{y \in \mathbb{R}^p : \varphi(y) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^p} \varphi(x)\}$.

В качестве обоснования предлагаемого подхода к получению приближенного решения задачи (2) доказана

**Теорема 2.5.** *Если последовательность $\{x_i\}_{i=0,1,\ldots}$ строится в соответствии с указанной схемой, то возможны два варианта:*
*1) на некотором конечном шаге $i_0 + 1$ будет выполняться равенство $\varphi(x_{i_0}) = \varphi(x_{i_0+1})$, что будет означать $\varphi(x_{i_0}) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^p} \varphi(x)$,*
*2)последовательность $\{\varphi(x_i)\}_{i=0,1\ldots}$ является строго убывающей и бесконечной, причём*

$$\varphi(x_{i+1}) \leqslant \varphi(x_i) - \frac{(\varphi(x_i) - \alpha_0)(\varphi(x_i) - \varphi^*)}{LC + \varphi(x_i) - \varphi^*},$$

*где $L$ – константа Липшица для функции $f(\cdot)$ на множестве $G(\alpha_0)$, а $C \geqslant \sup\limits_{x \in G(\alpha_0)} \|x\|$. Кроме того, имеет место*

$$\lim_{i \to \infty} \rho(x_i, S^*) = 0.$$

В **третьем разделе** рассматривается задача (3) о внутренней оценке заданного выпуклого тела лебеговым множеством выпуклой функции. Он состоит из пяти подразделов.

В **первом подразделе** приводится математическая формализация данной задачи в виде задачи отыскания максимина функции разности аргументов.

Во **втором подразделе** установлены некоторые свойства целевой функции экстремальной задачи (3).

**Теорема 3.1.** *Функция $\psi(x)$ является*

*1) липшицевой на $\mathbb{R}^p$;*

*2) квазивогнутой на $D$, т.е.*

$$\psi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \geq \min\{\psi(x_1), \psi(x_2)\},\ \forall x_1, x_2 \in D, \alpha \in [0,1],$$

*причем, если $\psi(x_1) < \psi(x_2)$, то $\psi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \psi(x_1),\ \forall \alpha \in (0,1)$.*

Рассматриваются также дифференциальные свойства целевой функции.

**Теорема 3.2** *Пусть функция $f(\cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^p$, $Arg \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} f(x) = \{x^*\}$ и дифференцируема по Гато всюду на $\mathbb{R}^p$, за исключением быть может точки $x^*$. Тогда функция $\psi(x)$ является супердифференцируемой в любой точке $x \in intD$, а формулу ее супердифференциала в точке $x$ можно представить в виде*

$$\overline{\partial}\psi(x) = co\{-f'(z-x) : z \in Q(x)\},\ \forall x \in intD,$$

*где $Q(x) = \{z \in \Omega : \psi(x) = f(z-x)\}$.*

В **третьем подразделе** получены необходимые и достаточные условия решения задачи (3).

**Теорема 3.3** *Пусть функция $f(\cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^p$, $Arg \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} f(x) = \{x^*\}$ и дифференцируема по Гато всюду на $\mathbb{R}^p$, за исключением быть может точки $x^*$. Для того, что бы точка $x_0 \in intD$ была решением задачи $\psi(x_0) = \max\limits_{x\in D}\psi(x)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$0_p \in co\{f'(z-x_0) : z \in Q(x_0)\}.$$

Отдельно, в виду дальнейшего приложения, получены необходимые и достаточные условия решения этой задачи для случая, когда функция $f(\cdot)$ в постановке задачи (3), является калибровочной функцией некоторого выпуклого тела.

**Теорема 3.5** *Пусть функция $f(\cdot)$ является калибровочной функцией некоторого выпуклого тела $M \subset \mathbb{R}^p$ и $0_p \in intM$. Тогда для того, что бы точка $x_0 \in intD$ была решением задачи (3) необходимо и достаточно, что бы*

$$0_p \in co\{w \in K^+(z,\Omega) : s(w,M) = 1, z \in Q(x_0)\}.$$

В **четвертом подразделе** показано, что внутренняя оценка выпуклого многогранника лебеговым множеством калибровочной функции сводится к задаче линейного программирования (теорема 3.6).

В **заключительном пятом подразделе** предлагается метод приближенного решения задачи внутренней оценки выпуклого тела лебеговым множеством калибровочной функции.

**Принципиальная схема метода**

Считаем, что нам заданы начальная точка $x_0 \in intD$ и $T_0$ – ограниченный выпуклый многогранник, содержащий множество $D$. В качестве $T_0$ можно взять грубую внешнюю оценку для $D$.

Предположим, что уже известна точка $x_k \in intD$, то есть $k-$е приближение решения задачи и многогранник $T_k$, содержащий $D$. Опишем поэтапно получение точки $x_{k+1} \in intD$ и многогранника $T_{k+1}$, так же содержащего $D$, то есть дадим описание одного шага метода.

1. Полагаем $m = 0, T_{k,0} = T_k$ и находим точку, принадлежащую проекции точки $x_k$ в несимметричной норме $k(\cdot)$ на множество $\Omega$, т.е. точку $y_k \in \Omega$, для которой

$$k(y_k - x_k) = \min_{y \in \Omega} k(y - x_k).$$

2. В точке $y_k$ строим опорную гиперплоскость $\Pi(y_k)$ к множеству $D$ (любую, если она не единственна). Гиперплоскость $\Pi(y_k)$ и граничные гиперплоскости многогранника $T_{k,m}$ образуют новый многогранник $T_{k,m+1}$, так же содержащий множество $D$. Полагаем $m = m + 1$.

3. Решаем задачу

$$\min_{y \in cl(\mathbb{R}^p \setminus T_{km})} k(y - x) \to \max_{x \in T_{km}}.$$

Пусть $x_{k,m}$ – любое решение этой задачи.

4. Если $x_{k,m} \in intD$, то полагаем $x_{k+1} = x_{k,m}, T_{k+1} = T_{k,m}$ и на этом шаг закончен. В противном случае находим точку пересечения отрезка $[x_k, x_{k,m}]$ с границей множества $D$. Обозначаем ее через $y_k$ и передаем в управление в п.2.

## Основные результаты работы

1. Установлены свойства калибра сильно выпуклого множества, а также условия строгой, сильной или слабой выпуклости лебеговых множеств функции расстояния в несимметричном пространстве. Получена неравенства, отражающие поведение функции расстояния на

отрезках и позволяющие сравнивать ее с поведением строго, сильно или слабо выпуклыми функциями. Также получены критерии выпуклости и вогнутости функции расстояния в несимметричном пространстве, обобщающее соответствующие известные результаты в симметричном пространстве.

2. Для задачи о внешней оценке компакта лебеговым множеством выпуклой функции получены необходимые и достаточные условия решения, предложен и обоснован подход к получению приближенного решения задачи.

3. Для задачи о внутренней оценки выпуклого тела лебеговым множеством выпуклой функции получены необходимые и достаточные условия решения. Кроме того, разработан и обоснован метод получения приближенного решения задачи о внутренней оценке выпуклого тела лебеговым множеством калибровочной функции.

## Список литературы

[1] *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967.

[2] *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.

[3] *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. Часть I, МЦНМО, М., 2011.

[4] *Дудов С.И.* Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы // Журн.вычисл.мат. и мат. физ., 1996, Т. 36, №5, С. 153–159.

[5] *Дудов С. И.* Дифференцируемость по направлениям функции расстояния //Матем.сб., 1995, Т. 186, №3, С. 29–52.

[6] *Дудов С. И.* Необходимые и достаточные условия максимина функции разности аргументов // Журн.вычисл.мат.и мат.физ. 1992, Т. 32, №12, С. 1869-1884.

[7] *Дудов С. И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Мат.заметки, 1997, Т. 61, №4, С. 530–542.

[8] *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа // ФИЗМАТЛИТ, М., 2007.

[9] *Тот Л.Ф.* Расположение на плоскости, на сфере и в пространстве. // М.: Физматлит, 1958.

## Список работ, опубликованных автором по теме научно-квалификационной работы


[1] *Абрамова В.В.* О внутренней оценке выпуклого тела лебеговым множеством квазивыпуклой функции // Современные проблемы теории функции и их приложения. Мат. 18-й международной Саратовской зимней школы. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2016, С. 19–20.

[2] *Абрамова В.В., Дудов С.И.* О внешней оценке компакта лебеговым множеством выпуклой функции // Математика. Механика: Сборник науч. Трудов. Саратов: Изд-во Сарат.ун-та, 2016, Вып. 18, С. 3-5.

[3] *Дудов С.И., Абрамова В.В.* О внутренней оценке выпуклого тела лебеговым множеством выпуклой дифференцируемой функции // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2017, Т. 17, вып. 3, С. 267–275.

[4] *Абрамова В.В., Дудов С.И.* О внутренней оценке многогранника лебеговым множеством выпуклой функции // XIII Международная Казанская летняя школа-конференция «Теория функции, ее приложения и смежные вопросы», Казань: Казанский ун-т, 2017, Т. 54, С. 22-23

[5] *Абрамова В.В., Дудов С. И.* О свойствах функции псевдорасстояния до выпуклого множества // Математика. Механика: Сборник науч. Трудов. Саратов: Изд-во Сарат.ун-та, 2017, Вып. 19, С. 3-7.

[6] *Абрамова В.В., Дудов С. И.* О свойствах псевдорасстояния до выпуклого множества // Современные проблемы теории функции и их приложения: Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 90-летию со дня рождения академика П.Л.Ульянова. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2018, С. 11–12.

[7] *Абрамова В.В., Дудов С. И.* О калибре сильно выпуклого множества // Математика. Механика: Сборник науч. Трудов. Саратов: Изд-во Сарат.ун-та, 2018, Вып. 20, С. 3- 5.

[8] *Абрамова В.В., Дудов С.И., Жаркова А.В.* Формула субдифференциала функции расстояния до выпуклого множества в асимметричном пространстве // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр., 2019, Т. 15, Вып. 3, С. 300–309.

[9] *Абрамова В.В., Дудов С. И.* О свойствах функции расстояния до слабо выпуклого множества // Математика. Механика: Сборник науч. Трудов. Саратов: Изд-во Сарат.ун-та, 2019, Вып. 21, С. 3-6.

[10] *Дудов С.И., Половинкин Е.С., Абрамова В.В.* О свойствах функции расстояния до сильно и слабо выпуклых множеств в асимметричном пространстве // Изв. вузов. Матем., 2020, № 5, С. 22–38.

[11] *Абрамова В.В., Дудов С.И., Осипцев М.А.* Внешняя оценка компакта лебеговым множеством выпуклой функции // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2020, Т. 20, Вып. 2, С. 142–153.

[12] *Абрамова В.В., Дудов С.И., Жаркова А.В.* О некоторых дифференциальных свойствах функции расстояния в несимметричном пространстве // Современные проблемы теории функции и их приложения: Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2020, С. 15–18.