МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

# Неантагонистические игры

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 –Математика и компьютерные науки

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук
механико-математического факультета

ЩЕРБАКОВОЙ ИННЫ АНДРЕЕВНЫ

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ________________ В.В. РОЗЕН

Зав. кафедрой
профессор, д.ф.-м.н., профессор ________________ В.В. РОЗЕН

Саратов 2020

**Введение.** Теория игр – это раздел математики, в котором изучаются математические модели конфликтов. Игры делятся на антагонистические и неантагонистические. В антагонистических играх интересы игроков противоположны, что исключает их кооперацию. Напротив, в неантагонистической игре возможна кооперация игроков.

Целью выпускной квалификационной работы является систематизация и подробное доказательство основных результатов, относящихся к теории неантагонистических игр. Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

1. Рассмотреть игры n лиц в нормальной форме; примеры и виды их решений.

2. Рассмотреть решение биматричных игр в чистых/смешанных стратегиях.

3. Рассмотреть кооперативное решение для биматричных игр при помощи арбитражной схемы Нэша.

4. Дать подробное доказателдьство теоремы Нэша.

**Основное содержание работы.** Введём описание неантагонистической игры.

**Определение 1.1.** Игра $\Gamma = \langle I, (X_i)_{i \in I}, (f_i)_{i \in I} \rangle$, где $I = \{1, \cdots, n\}$— множество игроков. $X_i$— множество стратегий игрока i,$f_i : X \to R$— функция выигрыша игрока $i$. Такая математическая модель называется игрой $n$ лиц в нормальной форме.

Формирование ситуации в игре Γ состоит в выборе каждым игроком $i \in I$ некоторой стратегии $x_i \in X_i$, при этом возникает ситуация $x = (x_i)_{i \in I}$. Полученную ситуацию каждый игрок $i = 1, \cdots, n$ оценивает со своей точки зрения с помощью функции $f_i$. Удобно считать, что $f_i(x)$ есть величина выигрыша, получаемого игроком $i$ в ситуации $x$.

Таким образом, неантагонистическая игра может рассматриваться как математическая модель совместного принятия решения несколькими сторонами, имеющими несовпадающие интересы.

**Определение 1.2.** Пусть $\Gamma = \langle I, (X_i)_{i \in I}, (f_i)_{i \in I} \rangle$— игра n лиц, заданная в нормальной форме. Ситуация $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0) \in X$ называется ситуацией равновесия в игре Γ (равновесием в смысле Нэша),если для всех $i \in I, x_i \in X_i$

выполняется

$$f_i(x^0 \| x_i) \leqslant f_i(x^0). \tag{1.1}$$

*Пояснение.* Через $x^0 \parallel x_i$ обозначается ситуация, полученная из ситуации $x^0$ заменой ее $i$-й компоненты $x_i^0$ на стратегию $x_i$. Таким образом, $x^0 \parallel x_i$ есть ситуация, возникающая при одностороннем отклонении игрока $i$ от ситуации $x^0$.

В бескоалиционной игре всякая ситуация равновесия является устойчивой: если такая ситуация сложилась, то она не будет иметь оснований для разрушения, так как ни один из игроков не заинтересован в одностороннем отклонении от нее. И обратно, если ситуация не является равновесной, то, как следует из определения, найдется хотя бы один игрок, заинтересованный в одностороннем отклонении от этой ситуации, поэтому такая ситуация имеет тенденцию к разрушению.

Принцип равновесия по Нэшу является особенно важным для биматричных игр.

**Определение 2.1.** Игра $\Gamma = \langle I, (X_i)_{i \in I}, (f_i)_{i \in I} \rangle$, в которой $n = 2$ и множества стратегий игроков конечны, называется биматричной игрой; такая игра может быть задана парой матриц $A = \|a_i^j\|, B = \|b_i^j\| (i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m})$, где A есть матрица выигрышей игрока 1 и B матрица выигрышей игрока 2. Биматричная игра обозначается через $\Gamma_{(A,B)}$.

В биматричной игре выигрыш игрока 1 может не совпадать с проигрышем игрока 2. В случае, когда это обстоятельство имеет место, то есть, когда $a_i^j = -b_i^j$ при всех $i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m$ получается матричная игра с платежной матрицей A. Задание матрицы B становится здесь излишним.

**Замечание 2.1.** Для биматричной игры $\Gamma_{(A,B)}$ ситуация $(i_0, j_0)$ является ситуацией равновесия по Нэшу тогда и только тогда, когда при всех $i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m$ выполняется

$$a_i^{j_0} \leqslant a_{i_0}^{j_0}, b_{i_0}^j \leqslant b_{i_0}^{j_0}. \tag{2.1}$$

**Определение 2.2.** Если в антагонистической игре множества стратегий игроков конечны, то такая игра называется матричной. Матричная игра задается в виде матрицы $A = \|a_i^j\|$ $(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m})$, которая называется матрицей выигрышей или платежной матрицей. В этом случае стратегии игрока 1 могут быть отождествлены с номерами строк, а стратегии игрока 2 — с номерами столбцов платежной матрицы. Число $a_i^j$ рассматривается одновременно как выигрыш игрока 1 и проигрыш игрока 2 в ситуации $(i, j)$.

**Определение 2.3.** Пусть $\Gamma_A$ — матричная игра с платежной матрицей $A = \|a_i^j\|$. Ситуация $(i_0, j_0)$ называется седловой точкой в игре $\Gamma_A$, если при всех $(i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$ выполняется двойное неравенство:

$$a_i^{j_0} \leqslant a_{i_0}^{j_0} \leqslant a_{i_0}^{j} \tag{2.2}$$

**Замечание 2.2.** Ситуация $(i_0, j_0)$ является седловой точкой игры $\Gamma_A$ тогда и только тогда, когда элемент $a_{i_0}^{j_0}$ является одновременно наименьшим элементом своей строки и наибольшим элементом своего столбца. Устойчивые в матричной игре ситуации — это и есть ее седловые точки: одностороннее отклонение от седловой точки не выгодно ни одному из игроков.

В случае, когда биматричная игра является матричной (то есть,когда $b_i^j = -a_i^j$), второе неравенство в (2.1) принимает вид $a_{i_0}^{j_0} \leqslant a_{i_0}^{j}$, и в результате приходим к двойному неравенству (2.2), которое означает, что ситуация $(i_0, j_0)$ есть седловая точка в игре с платежной матрицей $A$. Таким образом, принцип равновесия можно рассматривать как обобщение принципа седловой точкий при переходе от класса матричных игр к более широкому классу биматричных игр.

**Определение 3.1.** Пусть $\Gamma_{(A,B)}$ — биматричная игра с матрицами выигрышей A и B формата $n \times m$. Множеством чистых стратегий игрока 1 является $\{1, \cdots, n\}$ и множеством чистых стратегий игрока 2 является $\{1, \cdots, m\}$. Под смешанной стратегией игрока 1 в игре $\Gamma_{(A,B)}$ понимается любой вероятностный вектор $x = (x_1, \cdots, x_n) \in S_n$, а под смешанной стратегией игрока 2 — любой вероятностный вектор $y = (y_1, \cdots, y_m) \in S_m$. Если игрок 1 использует смешанную стратегию $x$, а игрок 2 — смешанную стратегию $y$, то ввиду независимости соответствующих распределений, вероятность появления ситуации $(i, j)$ равна произведению $x_i, y_j$, и в этой ситуации игрок 1 получает выигрыш $a_i^j$, а игрок 2 — выигрыш $b_i^j$. Таким образом, в ситуации в смешанных стратегиях $(x, y)$ исходом для первого игрока будет случайная величина $\xi_1 = \begin{pmatrix} a_i^j \\ x_i y_j \end{pmatrix}$, а для игрока 2— случайная величина $\xi_2 = \begin{pmatrix} b_i^j \\ x_i y_j \end{pmatrix}$.

**Определение 3.2.** В качестве выигрышей игроков 1 и 2 берутся математические ожидания данных случайных величин:

$$F_A(x, y) = \sum_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}} (x_i y_j) a_i^j, \tag{3.1}$$

$$F_B(x, y) = \sum_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}} (x_i y_j) b_i^j. \tag{3.2}$$

В результате получается новая игра игроков 1 и 2, в которой множествами их стратегий будут множества вероятностных векторов $S_n$ и $S_m$. Построенная игра называется смешанным расширением игры $\Gamma_{(A,B)}$ и обозначается через $\overline{\Gamma_{(A,B)}}$.

**Лемма 3.1.** Если $x, y$ — ситуация равновесия в игре $\Gamma_{(A,B)}$ и $S_p x = T_1, S_p y = T_2$, тогда вектор-строка $x$ является решением однородной системы линейных уравнений

$$x \cdot B_{T_2} = 0, \tag{3.3}$$

а вектор-столбец $y$ — решением однородной системы линейных уравнений

$$A_{T_1} \cdot y = 0. \tag{3.4}$$

**Теорема 3.1.** Для того, чтобы ситуация в смешанных стратегиях $(x^0, y^0)$, $S_p x^0 = T_1$ и $S_p y^0 = T_2$ являлась ситуацией равновесия в биматричной игре $\Gamma_{(A,B)}$ необходимо и достаточно, чтобы

a) вектор $x^0$ был решением системы линейных уравнений (3.5);

b) вектор $y^0$ был решением системы линейных уравнений (3.6);

c) вектор $x^0$ был решением системы линейных неравенств:

$$x \cdot B'_{T_2} \leqslant 0; \tag{1.12}$$

d) вектор $y^0$ был решением системы линейных неравенств:

$$A'_{T_1} \cdot y \leqslant 0. \tag{1.13}$$

Укажем два частных случая, в которых процедура нахождения ситуаций равновесия с заданными спектрами может быть упрощена.

*Случай 1.* Обозначим через $A_{[T_1,T_2]}$ подматрицу матрицы $A$, состоящую из тех элементов $a_i^j$, для которых $i \in T_1$ и $j \in T_2$. Аналогичным образом определяем подматрицу $B_{[T_1,T_2]}$ матрицы $B$.

Если матрицы $A_{[T_1,T_2]}$ и $B_{[T_1,T_2]}$ обе оказываются невырожденными, то все решения системы (3.5) и все решения системы (3.6) пропорциональны между собой. В этом случае может быть только одна ситуация $(x, y) \in S_n \times S_m$, для которой $x$ является решением системы (3.5), а $y$ — решением системы (3.6). Тогда неравенства (3.8) и (3.9) должны быть проверены для компонент этой единственной ситуации.

*Случай 2.* Ситуация $(x^0, y^0)$ в игре $\Gamma_{(A,B)}$ называется вполне смешанной, если спектр $x^0$ состоит из всех чистых стратегий игрока 1 и спектр $y^0$ из всех чистых стратегий игрока 2. При установлении того, что вполне смешанная ситуация $(x^0, y^0)$ является ситуацией равновесия, условия c)и d) проверять не надо, так как они выполнены автоматически. Из теоремы 1.1 следует, что биматричная игра $\Gamma_{(A,B)}$ имеет вполне смешанную ситуацию равновесия тогда и только тогда, когда системы однородных уравнений (3.5) и (3.6) имеют положительные решения.

Как отмечалось ранее, равновесие является важнейшим принципом оптимальности в бескоалиционных играх, то есть играх, в которых не рассматривается образование коалиций. Коалиция является формой кооперации, направленной на увеличение первоначальных возможностей игроков, или, в теоретико–игровых терминах, на увеличение их выигрышей. Отметим, что в антагонистической (в частности, в матричной) игре кооперация игроков лишена смысла, так как в такой игре улучшение положения одного из них приводит к ухудшению положения другого. При переходе от матричной игры к биматричной картина меняется: в биматричной игре кооперация игроков может улучшить положение их обоих. В биматричной игре имеется только одна нетривиальная коалиция (то есть коалиция, состоящая более, чем из одного игрока) — коалиция обоих игроков. Для пояснения отличий между индивидуальным выбором решений обоими игроками и совместным принятием решения коалицией этих игроков, рассматривается пример "конкурс на реализацию проекта".

При изучении кооперативного аспекта игры в теории игр внимание обращается, как правило, не на ситуации игры, а на ее исходы. В соответствии с этим в основу принципов оптимальности кладется идея выгодности.

**Замечание 3.2.** Проанализируем — как может быть реализована идея выгодности в рамках неантагонистической игры двух лиц. Пусть $X$ — множество стратегий игрока 1 и $Y$ — множество стратегий игрока 2. Если игроки 1 и 2 образуют коалицию $\{1, 2\}$, то эта коалиция может создать любую ситуацию $(x, y) \in X \times Y$ и, следовательно, реализовать любой исход игры. Возникает вопрос — какой исход игры в этом случае следует считать наиболее выгодным для коалиции $\{1, 2\}$, то есть оптимальным для нее?

Скажем, в рамках примера 1.6, игроки 1 и 2, объединившись в коалицию, очевидно, предпочтут исход $(4, 4)$ исходу $(2, 2)$, однако исходы $(7, -1)$ и $(-1, 7)$ также являются кандидатами на оптимальный исход.

В общем случае для биматричной игры $\Gamma_{(A,B)}$ рассмотрение вопроса об ее оптимальном исходе с точки зрения коалиции $\{1, 2\}$ удобно представить в геометрической форме следующим образом. На координатной плоскости $(u_1, u_2)$ изобразим точки, координатами которых являются выигрыши игроков $(a_i^j, b_i^j)$ в каждой возможной ситуации $(i, j)$, где $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, m$ (по оси $u_1$ откладываем выигрыши игрока 1 и по оси $u_2$ — выигрыши игрока 2). При этом возникает картинка вроде изображенной на рис. 1.1. Поскольку коалиция $\{1, 2\}$ может выбрать любой из представленных исходов, то получается фактически задача 2–критериальной оптимизации, где игрок 1 стремится максимизировать критерий $u_1$, а игрок 2 стремится максимизировать критерий $u_2$.

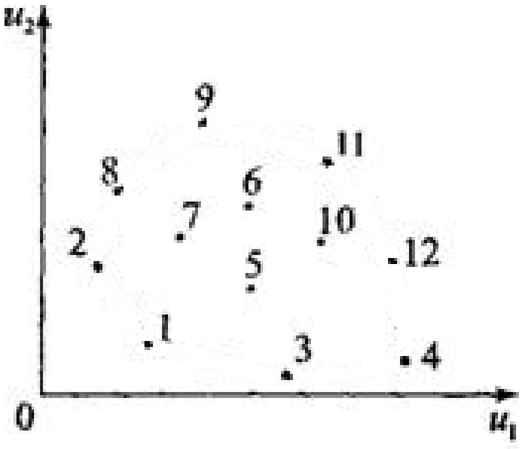

Рис. 1.1

Анализ задачи многокритериальной оптимизации содержит 2 этапа. 1–этап базируется на отношении доминирования по Парето. Отбрасывая исходы, доминируемые по Парето, получаем множество Парето–оптимальных исходов (скажем, в примере, представленном на рис. 1.1, Парето–оптимальными исходами будут исходы $\{4, 9, 11, 12\}$). Выбор оптимального исхода следует производить из множества Парето–оптимальных исходов. 2–й этап — решение вопроса: какой исход из множества Парето–оптимальных исходов следует рассматривать в качестве оптимального исхода игры?

Отметим, что отбрасывая доминируемые по Парето исходы, игроки выступают как союзники, так как этот шаг выгоден им обоим. Однако при сравнении любых двух Парето–оптимальных исходов игроки из союзников превращаются в противников: любые два Парето–оптимальных исхода несравнимы по Парето, следовательно, увеличение выигрыша одного игрока влечет уменьшение выигрыша другого игрока.

Для решения задачи нахождения оптимального исхода коалиции игроков в биматричной игре сделаем еще одно допущение: для коалиции $\{1, 2\}$ допустим использование не только чистых, но и смешанных стратегий.

**Определение 3.3.** Смешанной стратегией коалиции $\{1, 2\}$ в биматричной игре $\Gamma_{(A,B)}$ будем называть всякий вероятностный вектор $z = z_{i,j}$ на множестве чистых ситуаций этой игры (предполагается, что $z_{i,j} \geqslant 0$, $\sum z_{i,j} = 1$).

**Замечание 3.3.** Предположим, что игрок 1 использует смешанную стратегию $x = (x_1, \cdots, x_n) \in S_n$, а игрок 2 — смешанную стратегию $y = (y_1, \cdots, y_m) \in S_m$. Тогда на множестве ситуаций игры возникает вероятностный вектор $z_{i,j}$ , где $z_{i,j} = x_i y_j$ $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$; он будет по определению смешанной стратегией коалиции $\{1, 2\}$. Однако вектора указанного вида реализуют лишь независимые вероятностные распределения на множестве чистых ситуаций игры. Возможность реализации произвольного, а не только независимого распределения на множестве чистых ситуаций игры — есть проявление "эффекта кооперации"применительно к смешиванию стратегий игроков.

Допущение смешанных стратегий коалиции $\{1, 2\}$ приводит к тому, что вместе с двумя исходами $(u_1, u_2)$, $(u_1', u_2')$ коалиция $\{1, 2\}$ может реализовать также исход $\lambda(u_1, u_2) + (1 - \lambda)(u_1', u_2') = (\lambda u_1 + (1 - \lambda))u_1', \lambda u_2 + (1 - \lambda))u_2')$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. С геометрической точки зрения это означает, что множество исходов биматричной игры $\Gamma_{(A,B)}$ превращается в многоугольник, вершинами которого будут точки $(a_i^j, b_i^j)$ $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$. При этом исходы, оптимальные по Парето, составляют "северо–восточную границу"этого многоугольника, см. рис.1.2.

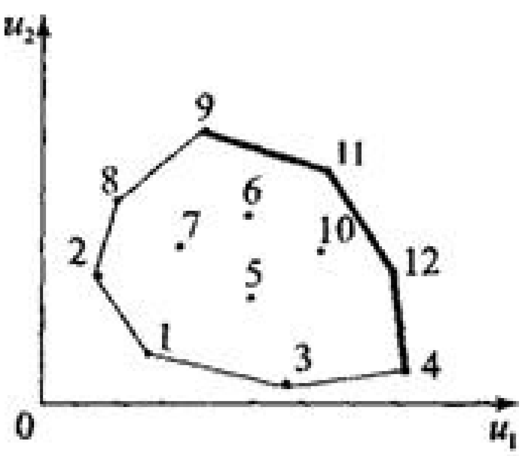

Рис. 1.2

Задача нахождения кооперативного решения биматричной игры сводится теперь к построению правила, которое для каждого такого многоугольника исходов указывает единственный оптимальный исход, принадлежащий его "северо–восточной границе". Рассмотрим решение этой задачи, известное в теории игр как арбитражное решение Нэша.

Арбитражное решение представляет собой некоторую систему требований (аксиом), с помощью которых для любой игры выделяется ее единственное решение — оптимальный исход этой игры.

**Замечание 3.4.** Для биматричной игры $\Gamma_{(A,B)}$ обозначим через $D$ область на плоскости $(u_1, u_2)$, которая совпадает с множеством исходов этой игры в смешанных стратегиях; пусть $v_A$ — цена матричной игры $\Gamma_A$, $v_B$ — цена матричной игры $\Gamma_B$ в смешанных стратегиях. При этом точка $M_0(v_A, v_B)$ называется точкой status quo. Арбитражное решение Нэша для каждой области $D$ с выделенной точкой $M_0$ указывает единственную точку $M^*(u_1^*, u_2^*)$ области $D$, которая интерпретируется как оптимальный исход.

Математически арбитражное решение Нэша определяется как отображение $\Phi$, которое каждой паре вида $(D, (v_A, v_B))$ ставит в соответствие точку $(u_1^*, u_2^*) \in D$, причем отображение $\Phi$ удовлетворяет следующим аксиомам.

1. Коллективная рациональность: если для $(u_1, u_2) \in D$ имеет место $(u_1, u_2) \geqslant^{Par} (u_1^*, u_2^*)$, то $(u_1, u_2) = (u_1^*, u_2^*)$.

Требование коллективной рациональности есть не что иное, как оптимальность исхода $(u_1^*, u_2^*)$ по Парето.

2. Индивидуальная рациональность: $u_1^* \geqslant v_A$, $u_2^* \geqslant v_B$.

Требование индивидуальной рациональности означает, что при оптимальном исходе каждый игрок должен получить не меньше, чем его максимальный гарантированный выигрыш (не меньше"своего"максимина, совпадающего с ценой соответствующей игры).

3. Линейность: Пусть область $D'$ получается из $D$ с помощью линейного преобразования вида $u_1' = \alpha_1 u_1 + \beta_1$, $u_2' = \alpha_2 u_2 + \beta_2$, где $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Положим $v_A' = \alpha_1 v_A + \beta_1$, $v_B' = \alpha_2 v_B + \beta_2$. Тогда $\Phi(D', (v_A', v_B')) = (\alpha_1 u_1^* + \beta_1, \alpha_2 u_2^* + \beta_2)$.

Смысл аксиомы линейности состоит в том, что оптимальное решение не должно зависеть от выбора начала отсчета и масштаба измерения выигрышей.

4. Симметрия: Если множество исходов $D$ симметрично относительно биссектрисы первого координатного угла и $v_A = v_B$, тогда $u_1^* = u_2^*$.

Эта аксиома постулирует равноправие игроков.

5. Независимость от посторонних альтернатив: Пусть $D_1 \subseteq D$ и $\Phi(D, (v_A, v_B)) \in D_1$. Тогда $\Phi(D_1, (v_A, v_B)) = \Phi(D, (v_A, v_B))$.

В заключение работы дано подробное доказательство важнейшей теоремы теории неантагонистических игр – теоремы Нэша.

**Теорема 4.3**(Нэша) Каждая биматричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

Далее в приложение А дается описание игры крестики-нолики. С помощью ориентированного графа рассматриваются оптимальные стратегии игры, которые образуют равновесие Нэша. Также игра крестики-нолики представлена в виде программы на языке C++.

**Заключение.** Данная бакалаврская работа посвящена теме «Неантагонистические игры».

В ходе работы были выполнены следующие задачи:

1. Были рассмотрены игры n лиц в нормальной форме. Игры n лиц представляли в виде математической модели совместного принятия решения в условиях несовпадения интересов. Примеры экономических задач, моделируемых бескоалиционными играми.

2. Были рассмотрены решения биматричных игр в чистых/смешанных стратегиях. Принцип оптимальности в форме равновесия по Нэшу.

3. Изучено кооперативное решение для биматричных игр при помощи арбитражной схемы Нэша. Метод решения задачи многокритериальной оптимизации.

4. Дано подробное доказательство теоремы Нэша.