МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического анализа

# Дискретное преобразование Фурье. Его свойства и приложения

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Бортника Романа Алексеевича

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.,доцент ________________ В.Г. Тимофеев

подпись, дата

Зав. кафедрой

д.ф-м.н., профессор ________________ Д.В. Прохоров

подпись, дата

Саратов 2020

**Введение.** Предметом исследования ясвляется дискретное преобразование Фурье сигнала и его свойства.. Сигнал может быть определен как функция от времени. Понятие времени в математическом представлении может быть как непрерывной, так и дискретной величиной. Сигналы в непрерывном потоке времени представляются как функции от непрерывной переменной. Дискретные сигналы определяются в дискретный момент времени и представляются последовательностями чисел.

Дискретные сигналы могут появляться при дискретизации аналоговых сигналов или же могут порождаться непосредственно некоторым дискретным во времени процессом. Вне зависимости от происхождения дискретных сигналов цифровые системы обработки таких сигналов обладают рядом полезных качеств. Они могут быть реализованы без потери информации на универсальных цифровых вычислительных машинах или с помощью цифровой аппаратуры.

Для начала рассмотрим операцию дискретизации, затем теорему Котельникова, после рассмотрим такое понятие, как дискретное прямое и обратное преобразование Фурье.

**Основное содержание работы.** Изучим основные виды сигналов, рассмотрим теорему Котельникова, понятие ДПФ и ОДПФ.

**Определение 1.** Сигнал – это материальное воплощение сообщения для использования при передаче, переработке и хранении информации.

**Определение 2.** Детерминированный сигнал полностью известен – его значение в любой момент времени можно определить точно.

**Определение 3.** Периодическим сигналом называют детерминированный сигнал, мгновенные значения которого повторяются через равные промежутки времени. $x(t) = x(t + iT)$, где $i$ любое целое число.

**Определение 4.** Сигнал $s(t)$ называют аналоговым, если он определен на непрерывной оси времени $t$, и в каждый момент может принимать произвольные значения. Аналоговый сигнал может быть представлен непрерывной, или кусочно-непрерывной функции переменной $t$.

**Определение 5.** Если сигнал $s_д(t)$ принимает произвольные значения только в фиксированные моменты времени $t_n, n$ — целое число, то такой сигнал называется дискретным.

**Определение 6.** Если значения дискретного сигнала $s_д(t)$ также берутся на фиксированной сетке значений, и при этом сами значения могут быть представлены числом конечной разрядности в одной из систем счисления, то такой дискретный сигнал называется цифровым $s_ц(t)$.

**Определение 7.** Отсчет — численное значение напряжения сигнала в определённый момент времени.

**Определение 8.** Нулевой отчет ДПФ есть сумма отсчетов сигнала.

$$S(0) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \tag{1}$$

Чтобы продолжить рассуждения, необходимо ввести понятия функции Дирака или дельта-функции и одного из ее свойств, которое в дальнейшем мы будем использовать.

Дельта-функция $\delta(t)$, или функция Дирака, представляет собой бесконечно узкий импульс с бесконечной амплитудой, расположенный при нулевом значении аргумента функции. "Площадь"импульса тем не менее равна единице

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, \ t \neq 0 \\ \infty, t = 0, \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Разумеется, сигнал в виде дельта-функции невозможно реализовать физически, однако эта функция очень важна для теоретического анализа сигналов и систем.

Далее рассмотрим фильтрующее свойство дельта-функции.

Рассмотрим скалярное произведение $x(t)$ и сдвинутой на $t_0$ дельта-функции $\delta(t - t_0)$ :

$$< x(t), \delta(t - t_0) >= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt. \tag{2}$$

Введем замену переменной $\xi = t - t_0$, тогда $t = \xi + t_0$, $dt = d\xi$, пределы интегрирования не меняются, и выражение (2) принимает вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi+t_0)\delta(\xi)d\xi = x(t_0). \tag{3}$$

Выражение (3) называется фильтрующим свойством дельта-функции. Благодаря именно фильтрующему свойству, дельта-функция получила широкое распространение при описании дискретных систем.

Далее мы рассмотрим способ выборки дискретных значений аналогового сигнала.

Допустим, что на входе АЦП (аналогово цифровой преобразователь) имеется аналоговый сигнал $s(t)$. Генератор импульсов формирует импульсы $v(t)$, которые управляют ключом, в результате чего на вход усилителя подаются короткие выборки сигнала длительности $\tau$, взятые через интервал дискретизации $T$.

Оценка сигнала $\hat{s}_д(t)$ может быть представлена в виде

$$\hat{s}_д(t) = s(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau}п_\tau(t-nT), \tag{4}$$

где $п_\tau$— прямоугольный импульс длительности $\tau$ единичной амплитуды, который мы уже рассматривали в предыдущих разделах.

Интегрируя $\hat{s}_д(t)$ на каждом интервале длительности импульса получим оценку значения сигнала $\hat{s}(nT)$ в момент времени $t_n = nT$. При конечной величине $\tau$ мы можем говорить об оценке значения сигнала $\hat{s}(t_n)$ в момент времени $t_n$ с некоторой погрешностью, ввиду изменения сигнала $s(t)$ на $\tau$ интервале. Поэтому мы используем шапочку над обозначением $\hat{s}_д(t)$, чтобы подчеркнуть приближенную оценку.

При уменьшении длительности $\tau$ погрешность оценки будет уменьшаться, и в пределе мы можем получить дискретный сигнал как:

$$s_д(t) = \lim_{\tau\longrightarrow 0}\hat{s}_д(t) = s(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lim_{\tau\longrightarrow 0}\frac{1}{\tau}п_\tau(t-nT) = s(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT), \tag{5}$$

где $\delta(t-nT)$ — смещенная на $nT$ дельта-функция Дирака.

Бесконечная сумма смещенных дельта-функций называется решетчатой функцией и обозначается $ш_T(t)$ :

$$ш_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT), \tag{6}$$

где индекс $T$ указывает временной интервал дельта-функций.

Тогда математической моделью дискретного сигнала будет произведение исходного аналогового сигнала $s(t)$ на решетчатую функцию:

$$s_{д}(t) = ш_T(t)s(t). \tag{7}$$

Заметим, что (7) уже не является приближенной оценкой, а представляет собой истинную модель дискретного сигнала.

Далее рассмотрим Теорему Котельникова. Для того чтобы восстановить исходный непрерывный сигнал из дискретизированного с малыми погрешностями, необходимо рационально выбрать шаг дискретизации. Поэтому при преобразовании аналогового сигнала в дискретный обязательно возникает вопрос о величине шага дискретизации . Интуитивно нетрудно понять следующую разумную идею. Если аналоговый сигнал обладает низкочастотным спектром, ограниченным некоторой верхней частотой (т.е. функция имеет вид плавно изменяющейся кривой без резких изменений амплитуды), то вряд ли на некотором небольшом временном интервале дискретизации эта функция может существенно изменяться но амплитуде.

Точность восстановления аналогового сигнала по его отсчетам зависит от интервала дискретизации . Чем он короче, тем меньше будет отличаться функция от кривой, проходящей через точки отсчетов. Однако с уменьшением интервала существенно возрастают сложность и объем обрабатывающей аппаратуры. При большом интервале дискретизации возрастает вероятность искажения или потери информации при восстановлении аналогового сигнала.

Оптимальное значение интервала дискретизации устанавливается теоремой Котельникова.

**Теорема.** Пусть аналоговый видеосигнал $s(t)$ имеет спектральную плотность $S(\omega)$, ограниченную полосу $B$ рад/с, как это показано на рисунке 2.7. Спектральная плотность $S(\omega)$ сигнала с ограниченной полосой равна нулю, если $|\omega| \geq B/2$. Тогда он может быть представлен своими равноотстоящими дискретными отсчетами $s(nT)$, взятыми с периодом $T = 2\pi/B$ сек, как:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) sinc(\pi(t - nT)/T). \tag{8}$$

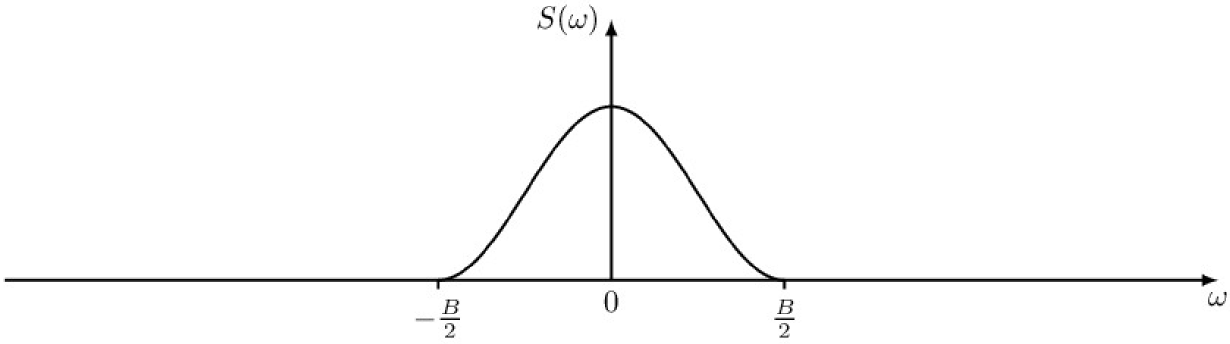


Рисунок 2.7.

Далее рассмотрим Дискретное преобразование Фурье и некоторые его свойства.

Пусть исходный дискретный сигнал $s_д(t)$ ограничен во времени и содержит $N$ ненулевых отсчетов, взятых с интервалом дискретизации $T$ сек. Данное предположение на практике всегда выполняется, потому что мы не можем получить бесконечное число отсчетов сигнала. Тогда длительность дискретного сигнала равна $NT$ секунд, и $s_д(t)$ можно записать как:

$$s_д(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s(t)\delta(t - nT), \tag{9}$$

При разложении периодически повторенного сигнала (9) в ряд Фурье получим дискретный спектр $S(k\Delta\omega)$, состоящий из гармоник кратных $\Delta\omega =$

$\frac{2\pi}{P_{min}} = \frac{2\pi}{NT}$ рад/с, $k$— произвольное целое число. Тогда коэффициенты разложения в ряд Фурье $S(k\Delta\omega)$ равны:

$$S(k\Delta\omega) = \frac{1}{NT} \int\limits_0^{NT} s_{\text{д}}(t) e^{-ik\Delta\omega t} dt. \tag{10}$$

Подставим (9) в (10):

$$S(k\Delta\omega) = \frac{1}{NT} \int\limits_0^{NT} \sum_{n=0}^{N-1} s(t)\delta(t - nT) e^{-ik\Delta\omega t} dt, \tag{11}$$

поменяем местами операции суммирования и интегрирования и применим фильтрующее свойство дельта-функции:

$$S(k\Delta\omega) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} \int\limits_0^{NT} s(t)\delta(t - nT) e^{-ik\Delta\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) e^{-ik\Delta\omega nT}. \tag{12}$$

Учтем, что $\Delta\omega T = \frac{2\pi}{N}$, тогда окончательно можно записать:

$$S(k\Delta\omega) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}. \tag{13}$$

Заметим, что показатели комплексных экспонент в выражении (13) не зависят от интервала дискретизации $T$, а только от индексов $n$ и $k$, указывающих порядковый номер временного и спектрального отсчета.

Выражение (13) справедливо для любого целого $k$, однако вспомним, что исходный сигнал $s_{\text{д}}(t)$ был дискретным, поэтому спектр $S(k\Delta\omega)$ является периодическим и повторяется каждые $N$ отсчетов. Это очень легко проверить если подставить в (13) вместо $k$, например $k + N$, тогда:

$$S((k+N)\Delta\omega) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) e^{-i\frac{2\pi}{N}n(k+N)} =$$

$$= \frac{1}{NT}\sum_{n=0}^{N-1} s(nT)e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}e^{-i2\pi n} = S(k\Delta\omega) \tag{14}$$

Таким образом, нет необходимости рассчитывать спектральные отсчеты для всех индексов $k$, а достаточно рассчитать лишь $N$ спектральных отсчетов $S(k\Delta\omega), k = 0\ldots N-1$. Выражение (13) является дискретным преобразованием, которое ставит в соответствие $N$ отсчетам исходного дискретного сигнала $s(nT), N$ спектральных отсчетов $S(k\Delta\omega)$ на одном периоде повторения спектра.

Заметим, что (13) является именно спектром, а не спектральной плотностью, потому что мы получили $S(k\Delta\omega)$ как результат разложения в ряд Фурье. Это означает, что единицы измерения $S(k\Delta\omega)$ совпадают с единицами измерения исходного сигнала.

Если мы будем оперировать только с индексами входного сигнала и спектральных отсчетов (положив $T = 1$), то получим выражение дискретного преобразования Фурье:

$$S(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}nk},\ k = 0\ldots N-1. \tag{15}$$

### Обратное дискретное преобразование Фурье периодического сигнала

Учтем, что ДПФ возвращает один период дискретного периодического спектра $S(k\Delta\omega)$, где $k = 0\ldots N-1$. Тогда дискретный спектр ДПФ на одном периоде можно записать используя дельта-функцию:

$$S_{\text{дпф}}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} S(\omega)\delta(\omega - k\Delta\omega). \tag{16}$$

Спектр $S_{\text{дпф}}$ является $\Omega$-периодической функцией и может быть разложен в ряд Фурье вида:

$$S_{\text{дпф}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(\xi_m)e^{i\xi_m\omega}, \tag{17}$$

где $\xi_m = \frac{2\pi m}{\Omega} = mT$ имеет смысл временных отчетов, так как мы раскладываем в ряд функцию частоты, а $p(\xi_m)$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье:

$$p(\xi_m) = p(mT) = \int\limits_0^{\Omega} S_{\text{дпф}}(\omega) e^{-i\omega mT} d\omega. \tag{18}$$

Подставим в (18) выражение (16):

$$p(mT) = \int\limits_0^{\Omega} \sum_{k=0}^{N-1} S(\omega)\delta(\omega - k\Delta\omega) e^{-i\omega mT} d\omega. \tag{19}$$

Поменяем местами операторы интегрирования и суммирования и применим фильтрующее свойство дельта-функции:

$$p(mT) = \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_0^{\Omega} S(\omega)\delta(\omega - k\Delta\omega) e^{-i\omega mT} d\omega =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} S(k\Delta\omega) e^{-i\Delta\omega T mk} = \sum_{k=0}^{N-1} S(k\Delta\omega) e^{-i\frac{2\pi}{N}mk}. \tag{20}$$

Подставим в (20) выражение (13) для $S(k\Delta\omega)$ :

$$p(mT) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} e^{-i\frac{2\pi}{N}mk} \tag{21}$$

Поменяем порядок суммирования и объединим показатели экспонент:

$$p(mT) = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}(n+m)k}. \tag{22}$$

Можно заметить, что сумма комплексных экспонент равна

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}(n+m)k} = N, \text{ при } n = -m. \tag{23}$$

При $n \neq -m$, сумму комплексных экспонент можно рассматривать как сумму первых $N$ членов геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = e^{-i\frac{2\pi}{N}(n+m)k}, \tag{24}$$

и начальным членом равным $b_0 = 1$.

Используя формулу суммы первых $N$ членов геометрической прогрессии получим для $n \neq -m$ :

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}(n+m)k} = \frac{b_0(q^N - 1)}{q - 1} = \frac{e^{-i\frac{2\pi}{N}(n+m)N} - 1}{e^{-i\frac{2\pi}{N}(n+m)} - 1} = 0, \text{ при } n \neq -m. \tag{25}$$

Тогда от суммы (22), с учетом (23)–(25), остается лишь одно слагаемое при при $n \neq -m$ :

$$p(mT)\frac{s(-mT)}{T}, \text{ откуда } s(mT) = Tp(-mT). \tag{26}$$

Возвращаясь к выражению (20), с учетом (26) можно окончательно записать:

$$s(nT) = Tp(-nT) = T\sum_{k=0}^{N-1} S(k\Delta\omega)e^{i\frac{2\pi}{N}nk}. \tag{27}$$

Опустив $\Delta\omega$ и приняв $T = 1$ можно перейти к паре дискретных преобразований Фурье, которые оперируют только с входным дискретным сигналом $s(n)$ и его спектром $S(k)$ :

$$S(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}, k = 0 \ldots N - 1,$$

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S(k)e^{i\frac{2\pi}{N}nk}, n = 0 \ldots N - 1. \tag{28}$$

Заметим, что в (28) мы ограничили индексы $n$ и $k$ значением $N-1$. На самом деле этого можно не делать, но из-за периодического характера сигнала и спектра их значения будут повторятся с периодом $N$.

Важно отметить, что на практике гораздо чаще требуется рассчитывать прямое ДПФ, чем обратное. Поэтому принято нормировочный множитель $\frac{1}{N}$ учитывать в обратном преобразовании, а не в прямом. Тогда пару ДПФ можно переписать в виде:

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}, k = 0 \ldots N-1,$$

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{i\frac{2\pi}{N}nk}, n = 0 \ldots N-1. \qquad (29)$$

Именно в виде (29) принято записывать выражения прямого и обратного ДПФ.

**Заключение.** В представленной работе был рассмотрен ряд основных определений, относящихся к дискретным сигналам, рассмотрена теорема Котельникова и рассмотрено дискретное преобразование Фурье. Это представление было основано на связи между последовательностями конечной длины и периодическими последовательностями. Данная тема является достаточно актуальной, так как дискретное преобразование Фурье широко применяется в алгоритмах цифровой обработки сигналов (его модификации применяются в сжатии звука в MP3, сжатии изображений в JPEG и др.), а также в других областях, связанных с анализом частот в дискретном (к примеру, оцифрованном аналоговом) сигнале.