МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федереальное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Многочлены Бернштейна

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

механико-математического факультета

Магомедова Ильи Магомедовича

Научный руководитель

Доцент, к.ф.-м.н.		Ю.В. Матвеева
должность, уч. степень, звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н. профессор		Д.В. Прохоров
должность, уч. степень, звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2020

Введение

В 1912 году Сергей Натанович Бернштейн ввёл многочлен:

$$B(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Для него был доказан тот факт, что если y_k – непрерывная на [0,1] функция, то последовательность $B_n(x)$ сходится при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [0, 1]$. Это позволило доказать знаменитую теорему Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на отрезке функции алгебраическими полиномами. Что не менее важно, доказательство оказалось очень простым.

В теории кривых Безье полиномы Бернштейна также нашли применение. Кривые Безье определяются упорядоченным набором полюсов – точек в конечномерном евклидовом пространстве. Построение такой кривой осуществляется с помощью параметрического варианта метода последовательных линейных интерполяций, который называется алгоритмом Кастелъжо. Каждая точка кривой Безье является выпуклой комбинацией полюсов. Управляя полюсами, можно построить параметрическую кривую сложного вида с требуемыми свойствами. Например, компьютерные шрифты создаются с помощью кривых Безье.

Цель данной выпускной работы – рассмотреть сведения о многочлене Бернштейна: свойства многочлена Бернштейна, различные представления многочлена Бернштейна, дифференцируемость многочлена Бернштейна, оценить точность приближения исходной функции. Кроме того, будет дана геометрическая интерпретация многочлена Бернштейна и получены кривые через одно из представлений многочлена Бернштейна. В предпоследнем параграфе будет дано определение модифицированного многочлена Бернштейна и рассмотрены некоторые его свойства. В последнем параграфе на практике будет показано, какой из вариантов многочлена Бернштейна лучше приближает исходную функцию.

Основная часть работы состоит из тринадцати разделов. В первом разделе формулируются определение полиномов Бернштейна, базисного полинома и определение центральных моментов. Во втором разделах доказываются алгебраические свойства полиномомов Бернштейнаа. В третьем разеделе изложены основные теоремы, относящиеся к теории полиномов Бернштейна. В четвертом разделе формулируются теоремы, связанные с предельными свойства полиномов Бернштейна. В пятом разделе формулируется и доказывается теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на отрезке функции алгебраическими полиномами. В шестом разделе показано, в каких формах можно записывать полином Бернштейна. В седьмом разделе исследуется дифференцируемость полиномов Бернштейна. В восьмом разделе описано, как с помощью векторого представления полинома Бернштейна получить кривые Безье. В девятом разделе рассматривается задача построения составной кривой Безье.

В десятом разделе формулируется и доказывается частный случай теоремы Вороновской - теорема Вороновской-Бернштейна. В одиннадцатом разделе описываются некоторые следствия теоремы Вороновской-Бернштейн, а также её частный случай. В двенадцатом разделе формулируется определение модифицированного многочлена Бернштейна и доказываются некоторые его свойства. В тринадцатом разделе наглядно продемонстрировано, что модифицированный полином приближает исходную функцию гораздо точнее стандартного при достаточно большом n. В качестве инструмента для построения графиков функции и полиномов выбрана программа $Wolfram$ $Mathematica$.

Основное содержание работы

В первом разделе даны определение полиномов Бернштейна, определение Базисного полинома и определение центральных моментов:

Определение 1. $\forall n \in \mathbb{N}$ алгебраический полином

$$B(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, y_k = f(\frac{k}{n}) \quad (1)$$

называется многочленом Бернштейна.

Обозначения: $Bn(x), B(f, x), B_n(f, x)$.

Определение 2. Полином

$$p_{nk} = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, x \in [0, 1] \quad (2)$$

называется базисным полиномом.

Определение 3. Функция

$$S_{nv}(x) = \sum_{k=0}^{n} (k/n - x)^v p_{nk}(x)$$

называется центральным моментом.

Некоторые свойства:

$$S_{n0}(x) = 1 \quad (3)$$

$$S_{n1}(x) = 0 \quad (4)$$

$$S_{n2}(x) = \frac{x(1-x)}{n} \quad (5)$$

$$S_{n4}(x) \leq \frac{x(1-x)}{n^2} \forall n \in \mathbb{N} \quad (6)$$

$$|S_{nm}(x)| \leq K(m) \frac{x(1-x)}{n^{(m+1)/2}} \forall n \in \mathbb{N} \quad (7)$$

$K(m)-$постоянная, зависящая от m.

В разделе под номером два сформулированы некоторые свойства полиномов Бернштейна:

1. $B(0) = y_0, B(1) = y_n$. Базинсные полиномы 2 обладают следующими свойствами:
2. При $x \in [0,1]$ многочлен $p_{nk}(x) \geqslant 0$, причем в точке 0 имеет кратность k, в точке 1 – нуль кратности $n-k$, строго положительный в $(0,1)$. Его единственный максимум лежит в точке $\frac{k}{n}$.
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \equiv 1$.
4. $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$
5. $B(x)$ является линейным оператором, отображающим пространство $C[0,1]$ (пространство непрерывных функций на $[0,1]$ с нормой $||f|| = max|f(x)|, x \in [a,b]$) в пространство алгебраических многочленов степени меньше n.

   Следствия из 5:

1. Если $f(x) \geqslant 0 \forall x \in [0,1]$, то $B(x) \geqslant 0$.
2. Если $\forall x \in [0,1] f(x) \geqslant g(x)$, то $B(f,x) \geqslant B(g,x)$.
3. $B(f,x) \leqslant B(|f|,x)$

В третьем разделе приведены классические теоремы, относящиеся к теории полиномов Бернштейна:

Теорема 1 (Бернштейн). Для любой функции $f(x)$, непрерывной на $[0,1]$, последовательность полиномов $B_n(f,x)$ при $n \to \infty$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[0,1]$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} Bn(x) = f(x)$$

Теорема 2 (Хлодовский). Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f^{(p)}(x)$ порядка $p \geq 1$, непрерывную на $[0,1]$. Тогда для каждого фиксированного $j = 1, ..., p$ последовательность $B_n^{(j)}(f,x)$ при $n \to \infty$ сходится к $f^{(j)}(x)$ равномерно на $[0,1]$.

Теорема 3 (Вороновская). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$ и в точке $x_0 \in [0,1]$ существует вторая производная $f''(x_0)$. Тогда

$$Bn(f,x_0) - f(x_0) = \frac{x_0(1-x)f''(x_0)}{2n} + \frac{\alpha_n(x_0)}{n}, \alpha_n(x_0) \to 0, n \to \infty$$

Теорема 4 (Поповичиу)**.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$. Тогда

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leq K\omega(f, \frac{1}{\sqrt{n}}), x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$$

с некоторой универсальной константой $K > 0$, не зависящей от выбора f, n, x. В частности, для функций, удовлетворяющих условию Липшица

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|, x, y \in [0,1]$$

с константой $L > 0$, можно утверждать, что

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leq \frac{Q}{\sqrt{n}}, x \in [0,1],$$

где $Q = KL$.

В разделах с четвертого по девятый рассматриваются остальные свойства стандартного полинома Бернштейна, а также метод получения составной кривой Безье через полином Бернштейна. В разделе номер двенадцать внимание уделено модифицированному многочлену Бернштейна и его свойствам. Такой полином определяется следущим образом. Если $f \in C^{(m)}[0,1], m \geq 2$, то многочлены Бернштейна дают приближение на основании существования лишь производной второго порядка функции f. Построим модифицированные многочлены Бернштейна $B_{nm}f$ при учете $f \in C^{(m)}[0,1]$. Положим для функции f, которая имеет столько непрерывных производных на $[0,1]$, сколько входят в правую часть соответствующих формул 1, следующее:

$$\begin{cases} B_{n1}(f,x) = B_n(f,x), B_{n2}(f,x) = B_n(f,x), \\ B_{n\nu}(f,x) = B_n(f,x) - \sum\limits_{k=2}^{\nu-1} \frac{1}{k!} S_{nk}(x) B_{n,\nu-k}(f^{(k)}, x) \end{cases} \tag{8}$$

при $\nu \geq 3$. В этом же разделе рассматриваются некоторые свойства модифцированного полинома.

Теорема 15. Если $f \in C^{(m)}[0,1], m \geq 2$, то

$$|B_{n,m+1}(f,x) - f(x)| \leq K(m)\frac{x(1-x)}{n^{m/2}}\omega(f^{(m)}, \frac{1}{\sqrt{n}}) \tag{9}$$

Теорема 16. Если $f \in C^{(m+1)}[0,1], m \geq 1$, то

$$|B_{n,m+1}(f,x) - f(x) - \alpha_{m+1}(x)f^{(m+1)}(x)| \leq K(m)\frac{x(1-x)}{n^{m+1}/2}\omega(f^{(m+1)}, \frac{1}{\sqrt{n}}) \tag{10}$$

$$\alpha_2(x) = \frac{1}{2!}S_{n2}(x),\ \ \alpha_3(x) = \frac{1}{3!}S_{n3}(x). \tag{11}$$

При $m \geq 3$:

$$\alpha_{m+1}(x) = \frac{1}{(m+1)!}S_{n,m+1}(x) - \sum_{k=2}^{m-1}\frac{1}{k!}S_{nk}(x)\alpha_{m+1-k}(x) \tag{12}$$

Теорема 17.

$$B_n'(f,x) = \frac{n}{x(1-x)}\sum_{k=0}^{n} f(k/n)(k/n - x)p_{nk}(x)$$

Далее строятся некоторые модифицированные полиномы для функции $e_v = x^v$ и выводятся оценки их точности.

Замечание 2.

$$B_{n3}(e_v) = e_v(v = 0, 1, 2)$$

$$B_{n3}(e_3, x) - e_3(x) = \frac{x(1-x)(1-2x)}{n^2}$$

$$||B_{n3}(e_3, x) - e_3|| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}n^2}$$

Замечание 3.

$$B_{n4}(e_v, x) = e_v, v = 0, 1, 2, 3$$

$$||B_{n4}(e_4, x) - e_4|| \leq \frac{1}{16}|\frac{3n+2}{n^3}|$$

Далее в этом же разделе формулируется еще одно свойство модифицированного полинома Бернштейна.

Теорема 18. B_{nv} - линейный оператор при $v < 3$. При $v \geq 3$ не каждый модифцированный полином Бернштейна является линейный оператором. При этом, если $\frac{2k-1}{2n} \leq x \leq \frac{2k+1}{2n}$, $f_n(x) = (x - k/n)^2$, то

$$B_{n3}(f_n, x) = -\frac{x(1-x)}{n}(*)$$

Заключение

Таким образом, были рассмотрены сведения о многочлене Бернштейна, свойства многочлена Бернштейна, различные представления многочлена Бернштейна, дифференцируемость многочлена Бернштейна. Кроме того, была дана геометрическая интерпретация многочлена Бернштейна и получены кривые через одно из представлений многочлена Бернштейна. Далее рассмотрена одна из модификаций многочлена Бернштейна, которая даёт более точное приближение исходной функции, исследованы свойства модификации многочлена Берштейна. Также в последнем параграфе основной чсти было наглядно продемонстрировано, насколько точнее модифицированный многочлен Бернштейна приближает функцию, нежели стадартный многочлен.

Полиномы Бернштейна играют важную роль в построении кривых Безье, активно использующихся при геометрическом моделировании. Геометрическое моделирование (компьютерная геометрия, Computer Aided Geometric Design, CAGD) — относительно молодое направление в прикладной математике, выделившееся в 60-70-х годах прошлого века. Оно объеденило некоторые идеи из геометрии и вычислительной математики на базе компьютерных технологий. В геометрическом моделировании изучаются методы построения кривых, поверхностей и тел, а также способы выполнения над ними различных операций. Значительный вклад в становление данного направления внесли Пьер Безье из автомобилестроительной компании «Рено» и Поль де Кастельжо из компании «Ситроен», предложив в 60-х годах XX века независимо друг от друга методы построения кривых.

В заключении своей бакалаврской работы хочу сказать, что удивительно, как в 1912 году Сергей Натанович Бернштейн описал, не имея современных вычислительных приборов, компьютерных программ, и использовал понятие полинома в конструктивном доказательстве аппроксимационной теоремы Вейерштрасса. Он мог опираться только на свои научные знания, смекалку и ум. И вот уже более 100 лет научный мир продолжает изучать модификации полинома Бернштейна, их свойства, представления и дифференцируемость, находя все новые и новые свойства, и применяя их на практике.