МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Преобразование Фурье обобщенных функций. Его свойства и приложения

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Перевозникова Михаила Михайловича

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н., доцент ________________ В.Г. Тимофеев

подпись, дата

Зав. кафедрой

д.ф-м.наук, профессор ________________ Д.В. Прохоров

подпись, дата

Саратов 2020

Введение. Целью работы является изучение свойств обобщенных функций и преобразования Фурье обобщенных функций, их практическое применение.Теория обобщенных функций является одной из важных отраслей математики, которая имеет широкое применение в практических областях. В частности, очень важны его приложения к теории изучения и обработки сигналов. Основным способом получения решений поставленных задач является преобразование Фурье, примененное к обобщенным функциям.

Актуальность работы заключается во все большей значимости применения преобразования Фурье в цифровой технике,в решении дифференциальных и интегральных уравнений, исследовании специальных функций и квадратурных формул.

Для начала рассмотрим некоторые понятия теории $L^1(R^n)$ и $L^2(R^n), n \geq 1$, преобразования Фурье и его обобщение на пространствах $L^p(R^n),\ p = 1, 2$. После рассмотрим применение преобразования Фурье к обобщенным функциям и выделим его свойства.

Основное содержание работы. Изучим основные свойства преобразования Фурье на пространствах $L^1(R^n)$ и $L^2(R^n), n \geq 1$.

Будем рассматривать пространства функций, определенных на R^n. Пространства $L^p = L^p(R^n), 1 \leq p < \infty$, - пространства всех измеримых функций f, таких, что $||f||_p = \left(\int\limits_{R^n} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Число $||f||_p$ называется L^p нормой f. Пространство $L^\infty(R^n)$ состоит из всех измеримых существенно ограниченных функций на R^n;

Для $f \in L^\infty(R^n)$ определим норму $||f||_\infty$ как существенную верхнюю грань $|f(y)|$ на R^n, т.е. $||f||_\infty = ess\ sup_{y \in R^n} |f(y)|$. Определим C_0- пространство всех непрерывных функций, обращающихся в нуль на бесконечности с L^∞-нормой.

Определение 1.1. Пусть $f \in L^1(R^n)$. Преобразованием Фурье функции f называется функция $F\left[f\right]$, определяемая равенством

$$F[f](y) = \int\limits_{R^n} f(x) e^{-2\pi i y \cdot x} dx$$

для всех $y \in R^n$.

Теорема 1.1. Справедливы следующие утверждения

1)Отображение $f \to F$ есть ограниченное линейное преобразование из $L^1(R^n)$ в $L^\infty(R^n)$, причем $||F||_\infty \leq ||f||_1$;

2) Если $f \in L^1(R^n)$, то $F[f](y)$ равномерно непрерывна.

Отметим,что пространство $L^1(R^n)$ наделено неким «умножением», превращающим это пространство в банахову алгебру. Это умножение называется сверткой.Она определяется следующим образом: если f и g принадлежат $L^1(R^n)$, то их свертка $h = f * g$ есть функция, значение которой в точке $y \in R^n$ равно

$$h(y) = \int\limits_{R^n} f(y-t)g(t)dt.$$

Можно показать, что $f(y-t)g(t)$ есть измеримая функция двух переменных y и t. Тогда из теоремы Фубини о перемене порядка интегрирования следует, что $h \in L^1(R^n)$ и $||h||_1 \leq ||f||_1||g||_1$. Далее, эта операция коммутативна и ассоциативна. Свертка $h = f * g$ определена также для всех $f \in L^p(R^n), 1 \leq p \leq \infty$,и $g \in L^1(R^n)$. Действительно, имеет место

Теорема 1.2. Пусть $f \in L^p(R^n), 1 \leq p \leq \infty$,и $g \in L^1(R^n)$; тогда $h = f * g$ определена и принадлежит $L^p(R^n)$, причем

$$||h||_p \leq ||f||_p||g||_1$$

Доказательство. Ясно, что $|h(y)| \leq \int\limits_{R^n} |f(y-t)g(t)|dt$, так что доказываемый результат есть простое следствие интегрального неравенства Минковского

$$\left(\int\limits_{R^n} |h(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int\limits_{R^n} \left(\int\limits_{R^n} |f(y-t)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} |g(t)|dt = ||f||_p||g||_1.$$

■

Существенной чертой гармонического анализа является тот факт, что преобразование Фурье свертки двух функций есть (поточечное) произведение их преобразований Фурье. Точнее, из определений легко вытекает следующая

Теорема 1.3. Пусть f и g принадлежат $L^1(R^n)$; тогда

$$F[f * g] = F[f] \cdot F[g]$$

Многие другие важные операции анализа также имеют простую связь с преобразованием Фурье. Например, пусть τ_h обозначает сдвиг на вектор $h \in R^n$ (т. е. τ_h есть оператор, переводящий функцию $g(y)$ в функцию $g(y-h)$); тогда

$$F[\tau_h f](y) = e^{-2\pi i h \cdot y} F[f](y), \tag{1.1}$$

$$F[e^{2\pi i x \cdot h} f(x)](y) = (\tau_h F[f])(y) \tag{1.2}$$

для всех $f \in L^1(R^n)$.

Пусть $a > 0$; обозначим через δ_a растяжение с коэффициентом a, т. е. оператор, переводящий функцию $g(y)$ в функцию $g(ay)$.

Для любой $f \in L^1(R^n)$ имеем

$$a^n F[\delta_a f](y) = F[f](a^{-1}y).$$

Дифференцирование и преобразование Фурье связаны следующим образом:

Теорема 1.4. Пусть $f \in L^1(R^n)$ и $y_k f(y) \in L^1(R^n)$, где y_k есть k - я координата y; тогда F дифференцируема по y_k и

$$\frac{\partial F[f](y)}{\partial y_k} = F[-2\pi i t_k f(x)](y).$$

Доказательство. Обозначим через $h = (0, ..., h_k, ..., 0)$ ненулевой вектор, направленный вдоль k - й оси координат; тогда, в силу равенства (1.2) и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости(если сходящаяся почти всюду последовательность измеримых функций может быть ограничена по модулю сверху интегрируемой функцией, то все члены последовательности, а также предельная функция тоже интегрируемы), имеем

$$\frac{F[f](y+h)-F[f](y)}{h_k}=F\left[\frac{e^{-2\pi ix\cdot h}-1}{h_k}f(x)\right](y)\to F[-2\pi ix_kf(x)](y).$$

при $h_k\to 0$.

$\blacksquare$

Переходя к преобразованию Фурье в пространстве $L^2(R^n)$, стоит отметить, что интеграла, определяющего преобразование Фурье для функций из $L^2(R^n)$, вообще говоря, не существует; тем не менее в этом пространстве имеется естественное определение и особенно элегантная теория преобразования Фурье.

Если в дополнение к условию интегрируемости мы предположим, что функция f квадратично интегрируема, то F также будет квадратично интегрируемой. Действительно, справедлив следующий основной результат :

Теорема 1.5. Пусть $f\in L^1\cap L^2$; тогда $||F||_2=||f||_2$.

Перед доказательством торемы рассмотрим выражение

$$\int\limits_{R^n}|f(y+h)-f(y)|^pdy)^{\frac{1}{p}}=\omega_{p,f}(h)=\omega(h)$$

будем называть данное равенство L^p-модулем непрерывности функции f. Он ограничен как функция h, поскольку $\omega(h)\leq 2||f||_p$. Более того, $\omega(h)\to 0$ при $|h|\to 0$. Это верно, когда f непрерывна и имеет компактный носитель.

Доказательство. Пусть $g(y)=\overline{f(-y)}$; тогда, в силу теоремы 1.2,

$h=f*g\in L^1(R^n)$ и, в силу теоремы 1.3, $F[h]=F[f]F[g]$. Но $F[g]=\overline{F[f]}$; значит,$F[h]=|F[f]|^2$.

Известно, что $F[h]\in L^1(R^n)$ и $h(0)=\int\limits_{R^n}F[h](y)dy($ из неравенства Шварца и из того,что L^2 модуль непрерывности $\omega_2(f,\delta)$ стремится к 0 при $\delta\to 0$, следует, что h равномерно непрерывна как свертка двух функций f и g из L^2).

Таким образом, имеем

$$\int\limits_{R^n} |F[f]|^2 dy = \int\limits_{R^n} F[h](y)dy = h(0) = \int\limits_{R^n} f(y)g(0-y)dy =$$

$$\int\limits_{R^n} f(y)\overline{f(y)}dy = \int\limits_{R^n} |f|^2 dy. \quad (1.3)$$

■

Эта теорема утверждает, что преобразование Фурье есть ограниченный линейный оператор, определенный на плотном подмножестве $L^1 \cap L^2$ пространства $L^2(R^n)$. Следовательно, существует единственное ограниченное расширение Φ этого оператора на все пространство L^2; Мы будем называть Φ преобразованием Фурье на L^2; так же будем использовать обозначение $F[f] = \Phi f$ для всех $f \in L^2(R^n)$

В общем случае, если $f \in L^2(R^n)$, то это определение преобразования Фурье дает нам F как L^2 - предел последовательности $\{F[h_k]\}$, где $\{h_k\}$— произвольная последовательность функций из $L^1 \cap L^2$, сходящаяся к f по L^2 -норме. Удобно выбрать последовательность $\{h_k\}$ так, чтобы $h_k(x)$ равнялась $f(x)$ при $|x| \le k$ и 0 при $|x| > k$.

Тогда F есть L^2 -предел последовательности функций $\{F[h_k]\}$, определяемых равенствами

$$F[h_k] = \int\limits_{|x|\le k} f(x)e^{-2\pi i y\cdot x}dx = \int\limits_{R^n} h_k(x)e^{-2\pi i y\cdot x}dx.$$

Линейный изометрический оператор, отображающий $L^2(R^n)$ на себя, называется унитарным оператором. Из данной теоремы немедленно следует, что оператор Φ изометрический.Более того, Φ отображает $L^2(R^n)$ на себя:

Теорема 1.6. Преобразование Фурье есть унитарный оператор на $L^2(R^n)$

Доказательство. Так как оператор Φ изометрический, то его область значений есть замкнутое подпространство в $L^2(R^n)$. Если бы это подпространство не совпадало с $L^2(R^n)$, то мы могли бы найти функцию $g \in L^2(R^n)$, такую, что $\int\limits_{R^n} F[f]g dy = 0$ для всех $f \in L^2(R^n)$ и $||g||_2 \ne 0$. Следовательно, $\int\limits_{R^n} fF[g]dx = \int\limits_{R^n} F[f]gdy = 0$ для всех $f \in L^2(R^n)$. Но отсюда следует, что $F[g](y) = 0$ для почти всех $y \in R^n$, в противоречии с тем, что $||F[g]||_2 = ||g||_2 \neq 0$.

■

Теорема 1.6 является главной частью основной теоремы L^2-теории преобразования Фурье:

Теорема 1.7. Обращение преобразования Фурье Φ^{-1} можно получить, полагая $(\Phi^{-1}F[g])(y) = (\Phi\,(F[g])\,(-y)$ для всех $g \in L^2(R^n)$.

Перейдем к определению преобразования Фурье обобщенной функции.

Функции $\varphi(x)$, которые непрерывно дифференцируемы любое количество раз, $(\varphi \in C^\infty(-\infty, \infty),)$ и финитны, т.е. $\varphi(x) \equiv 0$ вне некоторого интервала $[a, b]$, будем называть основными (пробными). Множество таких функций K назовем пространством основных функций. Множество точек, в которых основная функция $\varphi(x) \neq 0$, называется ее носителем и обозначается $supp\ \varphi(x)$.

Определение 1.2. Пространством быстро убывающих функций называется множество всех бесконечно дифференцируемых функций, которые стремятся к нулю при $|x| \to \infty$ вместе со своими производными любого порядка быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$, то есть для любого x выполняются неравенства

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq C_k, k, q = 0, 1, ... \tag{1.4}$$

Обозначим пространство убывающих функций $\mathcal{J}(R^n)$.Очевидно, что $\mathcal{J} \subset K$ Определим сходимость в $\mathcal{J}(R^n)$.

Зададим некоторую функцию $f(x)$, абсолютно интегрируемую в каждой области пространства R^n. С помощью этой функции поставим в соответствие каждой основной функции из этого пространства, число

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx \tag{1.5}$$

где интегрирование совершается по некоторой ограниченной области, вне которой функция $f(x)$ обращается в нуль.

Определение 1.3. Обобщенной функцией будем называть каждый линейный непрерывный функционал,который определен на пространстве основных функций. Обозначим пространство обобщенных функцй K'. Будем называть обобщенные функции, заданные формулами вида (1.5), регулярными, а все остальные функции - сингулярными .

Определим свертку двух локально интегрируемых функции $k(x)$ и $l(x)$ на R^n равенством

$$h(x) = k(x) * l(x) = \int\limits_{R^n} l(t)k(x-t)dt \tag{1.6}$$

Здесь $x - t = y \Longrightarrow t = x - y$.

Преобразование Фурье обобщенной функции.

Заметим, что пространство $\mathcal{J}$ так же называют пространством Шварца и обозначают $S(R)$. Введём на пространстве $S(R)$ понятие сходимости последовательности функций.

Определение 1.4. Последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(R)$ сходится к функции $\varphi \in S(R)$ в пространстве $S(R)$, если для всех m и $k \in N \cup 0$ равномерно по $x \in R, x^m\varphi_n^{(k)}(x)$ равномерно сходится к $x^m\varphi^{(k)}(x)$.

Заметим, что $\mathcal{J}(R) \subset S(R)$ и из сходимости в $\mathcal{J}(R)$ следует сходимость в $S(R)$. Тем не менее, пространства $S(R)$ и $\mathcal{J}(R)$ не совпадают, так как, например, функция e^{-x^2} принадлежит $S(R)$ и не принадлежит $\mathcal{J}$.

Раннее мы обозначали пространство обобщенных функцй K'. В случае пространства Шварца множество обобщенных функций будем обозначать $S'(R)$.

Определение 1.5. (Обобщенных функций медленного роста) Примем пространство $S(R)$ за пространство основных функций. Рассмотрим множество всех линейных непрерывных функционалов на $S(R)$. Это множество будем называть пространством обобщенных функций медленного роста и обозначать $S'(R)$. (Непрерывность функционала F на пространстве $S(R)$ определяется так же, как и непрерывность функционала на пространстве $K(R)$.)

Определение 1.6. Функционал $f \in S'(R)$ является (слабым) пределом последовательности функционалов $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S'(R)$, если для любой φ из $S(R)$ выполняется: $(f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$ при $n \to \infty$.

Определение 1.7. (преобразование Фурье обобщенных функций) Преобразованием Фурье обобщенной функции F из $S'(R)$ называется обобщенная функция $\Psi \in S'(R)$, действующая по формуле:

$$(\Psi, \varphi) = (F, \psi),\ \forall \varphi \in S(R).$$

Так как для любой функции $\varphi \in S(R)$ её преобразование фурье ψ тоже принадлежит пространству Шварца $S(R)$,то определение корректно.

Дадим альтернативное определение преобразования Фурье обобщенной функции.

Пусть $f(x)$ - абсолютно интегрируемая функция и $g(y)$ - ее преобразование Фурье. Т.к. $f(x)$ - абсолютно интегрируемая, то для нее справедливо:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) e^{-ixy} dy \right\} dx =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{-ixy} dx \right\} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(y)} \psi(y) dy = \frac{1}{2\pi} (g, \psi) \qquad (1.7)$$

Выражение (1.7) называется равенством Парсеваля.

Свойства преобразования Фурье обобщенной функции.

Заметим, что перечисленные в этом пункте свойства преобразования Фурье справедливы так же на пространстве основных функций .

Свойство 1. (Дифференцирование преобразования Фурье)

Имем:

$$D^{\alpha}F[f] = F[(ix)^{\alpha}f].$$

В частности, полагая $f = 1$ получаем

$$F[x^{\alpha}] = (-i)^{|\alpha|}D^{\alpha}F[1] = (2\pi)^{n}(-i)^{|\alpha|}D^{\alpha}\delta(\xi).$$

Свойство 2.(Преобразование Фурье производной)

Преобразование Фурье производной функции f определяется равенством

$$F[D^{\alpha}f] = (-i\xi)^{\alpha}F[f].$$

Доказательство. Полагая $f = \delta$ получаем

$$F[D^{\alpha}\delta] = (-i\xi)^{\alpha}F[\delta]$$

Раннее было показано, что $F[\delta] = 1$, следовательно получаем,что

$$F[D^{\alpha}\delta] = (-i\xi)^{\alpha}.$$

■

Свойство 3.(Преобразование Фурье сдвига)

$$F[f(x - x_0)] = e^{i\xi\cdot x_0}F[f].$$

Свойство 4.(Сдвиг преобразования Фурье.)

$$F[f](\xi+\xi_0) = F[e^{i\xi\cdot x_0}f](\xi)$$

Свойство 5.(Преобразование Фурье при линейном преобразовании аргумента.)

$$F[f(Ax)](\xi) = \frac{1}{|detA|}F[f]((A^{-1})^T\xi),\ detA \neq 0$$

здесь $A \to A^T$ обозначает операцию транспонирования матрицы A.

Свойство 6.

Обратный оператор F^{-1}определен на пространстве Z и переводит функционал g в функционал f по формуле $(g,\psi) = 2\pi(f,\varphi)$.Таким образом, положив,

$$\left.\begin{array}{c} F^{-1}[F[f]] = f,\ F[F^{-1}[g]] = g \\ (F^{-1}[g],\varphi) = \frac{1}{2\pi}(g, F[\varphi]) \end{array}\right\}$$

Свойство 7.(Преобразование Фурье свертки.)

Если $f(x) \in S'$ и $g(x)-$ финитная обобщенная функция с компактным носителем, то $g \in S'$,тогда

$$F[f*g] = F[f]\cdot F[g]$$

Заключение. В ходе выполнения работы были изучены пространства обобщенных функций и приведены их основные свойства. Был проведен обзор свойств преобразования Фурье в пространствах $L^1(R^n)$и$L^2(R^n)$,а так же приведены его основные приложения.

Данная тема является достаточно актуальной, так как теория обобщенных функций и ее преобразование Фурье может использоваться при разработке новых математических алгоритмов в решении задач математической физики.