МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Параметрический метод и оптимизация в задачах теории функций

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Горбунова Игоря Александровича

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н. __________ А.М. Захаров

подпись, дата

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор __________ Д.В. Прохоров

подпись, дата

Саратов 2020

Введение. Целью данной работы является изучение параметрического метода в задачах теории фнукций и его оптимизация. В теории однолистных функций значительное внимание уделяетяс исследованию геометрических свойств класса S голоморфных, однолистных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций $f(z), f(0) = 0, f'(0) = 1$. Многие вопросы могут быть сформулированы либо в виде задачи иследования на экстремум некоторого вещетсвенного функционала, либо в виде задачи нахождения множества значений некоторого комплекснозначного функционала, определенного в этом классе. Класс S не является линейным, и для решения в нем экстремальных задач методы классического вариационного исчесления оказываются недостаточными, поэтому математикам в теории однолистных функций были предложены другие методы. Одни из наиболее эффективных были даны Левнером и Шиффером. В 1923 году Левнер представил параметрический метод, получив с помощью теоремы Каратеодори о сходимости семейства областей к ядру дифференциальное уравнение для семейства . функций, сходящегося к данной однолистной функции. Систематически развил метод Левнера Г.М.Голузин, доказав, в частности, с его помощью теорему вращения. Параметрическим методом удалось получить ряд точных оценок, а в некоторых случаях, проинтегрировав уравнение Левнера, найти экстремальные функции. В 1943 году П.П. Куфарев дал обобщение уравнения Левнера, названное уравнением Левнера—Куфарева, с помощью которого были решены многие трудные задачи теории однолистных функций.

Основное содержание работы.

Экстремальные задачи являются центральными объектами внимания в геометрической теории функций комплексных переменных. Основной рассматриваемый класс состоит из всех аналитических и однолистных функций f в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, нормированных в $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Комплекснозначный функционал $L(f) = f(z_0)$ можно рассматривать как систему двух вещественных функционалов $\operatorname{Re} L(f)$ и $\operatorname{Im} L(f)$.

Среди многочисленных методов оценки функционалов в классе S отметим параметрический метод, созданный в основном Левнером и Куфаревым . В частности, это позволяет нам представить компактный подкласс S интегралами обыкновенного дифференциального уравнения Левнера. Гуллянский применил параметрический метод для решения задачи области значений.

То есть каждой функции f из компактного подкласса S соответствует непрерывная функция $u = u(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, такая что $f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t w(z,t)$, где $w(z,t)$ - решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения Левнера

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{e^{iu(t)}+w}{e^{iu(t)}-w}, \quad w(z,0)=z, \quad z \in \mathbb{D},$$

$$w(z,t) = e^{-t}\left(z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) z^n\right).$$

Заметим, что если $w(\mathbb{D},t) = \mathbb{D}\backslash\gamma[0,t]$ с кривой Жордана γ, то существует непрерывный u, порождающая f. Обратное утверждение ложно. Рассмотрим растущий разрез $\gamma[0,t], 0 \leqslant t \leqslant T$, вдоль иорданской кривой. Функции отображения $f(z,t)$, с гидродинамической нормализацией вблизи бесконечности как

$$f(z,t) = z + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), z \to \infty$$

которые отображают $\mathbb{H}\backslash\gamma[0,t]$ на $\mathbb{H}$, решают обыкновенное дифференциальное уравнение Левнера

$$\frac{df(z,t)}{dt} = \frac{2}{f(z,t)-\lambda(t)}, f(z,0)=z.$$

с некоторой функцией $\lambda(t)$, которая является вещественным непрерывным управляющим элементом. Число t называется мощностью полуплоскости $\gamma[0,t]$. Без потери общности предполагается, что $\gamma[0,t]$ исходит из начала координат. Затем f^- и f^+ отображают левую и правую стороны $\gamma[0,t]$ на два соседних отрезка $[f^-(0,t),\lambda(t)]$ и $[\lambda(t),f^+(0,t)]$ в $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$, соответственно,

$$\lambda(0) = 0, f^-(0,0) = f^+(0,0) = 0.$$

Теорема 1. *Пусть* $z_0 \in \mathbb{H}$. *Тогда*

$$\mathscr{R}(z_0) = \{z \in \mathbb{H} : Im\, z > Im\, z_0\} \cup \{z_0\}.$$

Распространим эти результаты на функции с фиксированным временем T. Пусть $K \subset \mathbb{H}$ ограничего, а $\overline{K}$ замыкание K. Множество является оболочкой, если в $K = \mathbb{H} \cap \overline{K}$ и $\mathbb{H} \backslash K$ односвязна. Обозначим $\mathscr{H}(T)$ множество конформных отображений из $\mathbb{H} \backslash K(T)$, имеющих гидродинамическую нормировку, с произвольными обочками $K = K(T)$ полуплоскости T, на $\mathbb{H}$. Задача состоит в том, чтобы найти область значений

$$\{f(z_0) : f \in \mathscr{H}(T), z_0 \notin K(T)\}, \quad z_0 \in \mathbb{H}$$

Теорема 2. *Область* $D(T), 0 < T \leqslant \frac{1}{4}$, *ограничена двумя кривыми* l_1 *и* l_2 *соединяющими точки* i *и* $i\sqrt{1-4T}$. *Кривая* l_1 *в комплексной плоскости* (u, v) *параметризована уравнениями*

$$u(T) = \frac{C_0^2(\varphi, T)(4T-1) + (1-\sin\varphi)^2}{2C_0(\varphi, T)\cos\varphi}, v(T) = \frac{1-\sin\varphi}{C_0(\varphi, T)},$$

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Кривая l_2 *симметрична* l_1 *относительно мнимой оси. Каждая точка* $w = u + iv \in \partial D(T) \backslash \{i\}$ *соответствует единственной функции из* $\mathscr{H}(T)$.

Теорема 3. *Область* $D(T), T > \frac{1}{4}$, *ограничена двумя кривыми* $l_1 = l_{11} \cup l_{12}$ *и* $l_2 = l_{21} \cup l_{22}$ *имеют общую точку* $i \in l_{11} \cap l_{21}$. *Кривая* l_{11} *в комплексной плоскости* (u, v), *для* $\varphi \in [\varphi_0(T), \frac{\pi}{2}]$ *параметризуются уравнениями*

$$u(T) = \frac{C_0^2(\varphi, T)(4T-1) + (1-\sin\varphi)^2}{2C_0(\varphi, T)\cos\varphi}, v(T) = \frac{1-\sin\varphi}{C_0(\varphi, T)},$$

Кривая l_{12}, *для* $\varphi \in [\varphi_0(T), \frac{\pi}{2}]$ *параметризуются уравнениями*

$$u(T) = \frac{C_{00}^2(\varphi, T)(4T-1) + (1-\sin\varphi)^2}{2C_{00}(\varphi, T)\cos\varphi}, v(T) = \frac{1-\sin\varphi}{C_{00}(\varphi, T)},$$

Кривая l_2 *симметрична* l_1 *относительно мнимой оси.*

Теорема 4. *Область $D^*(T), T > 0$, ограничена двумя кривыми L_1 и L_2 соединяющими точки i и $i\sqrt{1+4T}$. Кривая L_1 в комплекснйо плоскости (u, v) параметризуется уравнениями*

$$u(T) = \frac{(C^0(\varphi, T))^2(4T+1) - (1+\sin\varphi)^2}{2C^0(\varphi, T)\cos\varphi}, v(T) = \frac{1+\sin\varphi}{C^0(\varphi, T)},$$

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Кривая L_2 симметрична L_1 относительно мнимой оси.

Теорема 5. *Пусть $z_0 \in \mathbb{H}$. Если $Re\ z_0 = 0$, то*

$$V_{\mathscr{I}}(z_0) = \{z_0 + it : t \geqslant 0\}.$$

Далее предположим, что $Re\ z_0 > 0$ и определим две кривые $C(z_0)$ и $D(z_0)$ по формуле

$$C(z_0) = \left\{\sqrt{z_0^2 - 4t} : t \geqslant 0\right\} = \{x + iy \in \mathbb{H} : xy = Re\ z_0, Im\ z_0, x \in (0, Re\ z_0]\},$$

$$D(z_0) = \{z_0 + e^{iarg\ z_0}t : t \geqslant 0\}.$$

В таком случае замыкание $\overline{V_{\mathscr{I}}(z_0)}$ множества $V_{\mathscr{I}}(z_0)$ является замкнутым подмножеством $\mathbb{H}$ ограниченным $C(z_0)$ и $D(z_0)$, а также

$$V_{\mathscr{I}}(z_0) = \{z_0\} \cup \overline{V_{\mathscr{I}}(z_0)} \setminus D(z_0).$$

Случай $Re\ z_0 < 0$ следует, из случая $Re\ z_0 > 0$ путем отображения относительно мнимой оси.

Набор значений $\{f^{-1}(z_0)\}$ для обратных функций задается аналогично.

Теорема 6. *Пусть $z_0 \in \mathbb{H}$. Обозначим*

$$V_{\mathscr{I}}(z_0) = \{f^{-1}(z_0) : f \in \mathscr{I}, z_0 \in f(\mathbb{H})\}.$$

Если $Re\ z_0 = 0$, то

$$V^*_{\mathscr{I}}(z_0) = \{z_0 - it, t \in [0, Im\ z_0]\}.$$

Далее предположим, что $Re\ z_0 > 0$ *и определим две кривые* $C^*(z_0)$ *и* $D^*(z_0)$ *следующим образом*

$$C^*(z_0) = \left\{\sqrt{z_0^2 + 4t} : t \geqslant 0\right\} = \{x + iy \in \mathbb{H} : xy = Re\ z_0, Im\ z_0, x \geqslant Re\ z_0\},$$

$$D^*(z_0) = \{z_0 - e^{iarg\ z_0}t : t \in [0, |z_0|]\}.$$

Тогда замыкание $\overline{V^*_{\mathscr{I}}(z_0)}$ *множества* $V^*_{\mathscr{I}}(z_0)$ *является замкнутым подмножеством* $\mathbb{H}$, *ограниченным кривыми* $C^*(z_0), D^*(z_0)$ *и положительной вещественной полуосью. Множество* $V^*_{\mathscr{I}}(z_0)$ *задается по формуле*

$$V^*_{\mathscr{I}}(z_0) = \{z_0\} \cup \overline{V^*_{\mathscr{I}}(z_0)} \setminus (D^*(z_0) \cup [0, \infty)).$$

Случай $Re\ z_0 < 0$ *симметричен.*

Теорема 7. *Пусть* $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$. *Тогда*

$$\cup_{T>0} V_T(z_0) \cup \{0\} = \{z = |z|e^{i\varphi} \in \mathbb{D} : d_{\mathbb{D}}(0, z) - d_{\mathbb{D}}(0, z_0) \leqslant -|\varphi - arg\ z_0|, \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

Теорема 8. *Пусть* $z_0 \in (0, 1)$. *Для* $x_0 \in [-1, 1]$ *и* $T > 0$, *пусть* $r = r(T, x_0)$ *будет единственным решением уравнения*

$$(1 + x_0)(1 - z_0)^2 \log(1 - r) + (1 - x_0)(1 + z_0)^2 \log(1 + r) -$$

$$-(1 - 2x_0 z_0 + z_0^2) \log r = (1 + x_0)(1 - z_0)^2 \log(1 - z_0) +$$

$$+(1 - x - 0)(1 + z_0)^2 \log(1 + z_0) - (1 - 2x_0 z_0 + z_0^2) \log e^{-T} z_0$$

и пусть

$$\sigma(T, x_0) = \frac{2(1 - z_0)^2 \sqrt{1 - x_0^2}}{1 - 2x_0 z_0 + z_0^2}(arctanh z_0 - arctanh r(T, x_0)).$$

Кроме того, при фиксированном $T \geqslant 0$ определим две кривые $C_+(z_0)$ и $c_-(z_0)$ с помощью

$$C_\pm(z_0) = \{w_\pm(x_0) := r(T, x_0)e^{\pm\sigma(T,x_0)} : x_0 \in [-1, 1]\}.$$

Теорема 9. *Мы имеем*

$$\mathscr{W}(z_0) = \{re^{i\sigma} : d_{\mathbb{D}}(0, r) \geqslant |\sigma| + d_{\mathbb{D}}(0, z_0), \sigma \in [-\pi, \pi]\}.$$

Кроме того, определим набор значений

$$\mathscr{W}_T(z_0) = \{f^{-1}(z_0) : f \in \mathscr{S}_T, \text{ где } z_0 \in f(\mathbb{D})\},$$

и $\overline{W_T(z_0)}$ - это замыкание $W_T(z_0)$. Очевидно, $\mathscr{W}(z_0) = \cup_{T>0}\mathscr{W}_T(z_0)$.

Теорема 10. *Пусть $z_0 \in (0, 1)$. Для $x_0 \in [-1, 1]$ и $T > 0$, пусть $r = r(T, x_0)$ - единственное положительное решение уравнения*

$$(1 - x_0)(1 - z_0)^2 \log(1 - r) + (1 + x_0)(1 + z_0)^2 \log(1 + r)-$$

$$-(1 + 2x_0z_0 + z_0^2) \log r = (1 - x_0)(1 - z_0)^2 \log(1 - z_0)+$$

$$+(1 + x_0)(1 + z_0)^2 \log(1 + z_0) - (1 + 2x_0z_0 + z_0^2) \log e^T z_0$$

и пусть

$$\sigma(T, x_0) = \frac{2(1 - z_0)^2\sqrt{1 - x_0^2}}{1 + 2x_0z_0 + z_0^2}(arctanh\ r(t, X_0) - arctanh\ z_0).$$

Если

$$T < T^* := \log \frac{(1 + z_0)^2}{4z_0},$$

тогда $r(T, x_0)$ можно непрерывно увеличивать до $x_0 = 1, \mathscr{W}_T(z_0) = \overline{\mathscr{W}_T(z_0)}$ и $\mathscr{W}_T(z_0)$ - замкнутая область, ограниченная двумя кривыми $D_\pm(z_0) = \{r(T, x_0)e^{\pm i\sigma(T,x_0)} : x_0 \in [-1, 1]\}$. Для $T \geqslant T^*$ определим две кривые $\tilde{D}_\pm(z_0) = \{r(T, x_0)e^{\pm i\sigma(T,x_0)} : x_0 \in [-1, 1]\}$. У нас есть два случая: если T достаточно мало, чтобы $\tilde{D}_\pm(z_0)$ пересекались только при $x_0 = -1$, то $\overline{\mathscr{W}_T(z_0)}$ пересекает $\partial\mathbb{D}$ и ограничен двумя кривыми $\tilde{D}_\pm(z_0)$ и частью $\partial\mathbb{D}$

между точками пересечения с кривыми, включающей точку 1. В противном случае две кривые пересекаются на $(-1,1)$ *в первый раз для некоторого* $x_0 = \chi \in (-1,1)$ *и* $\overline{\mathscr{W}_T(z_0)}$ *является замкнутой областью, ограниченной* $\partial\mathbb{D}$ *и двумя кривыми* $\hat{D}_{\pm}(z_0) = \{r(T,x_0)e^{\pm i\sigma(T,x_0)} : x_0 \in [-1,\phi]\}$. *В двух последних случаях* $\mathscr{W}_T(z_0) = \overline{\mathscr{W}_T(z_0)} \cap \mathbb{D}$.

Теорема 11. *Пусть* $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ *и* $\tau \in (0,1]$. *Множество* $V_{\mathscr{S}(\tau)}(z_0)$ *это образ замкнутой области, ограниченной двумя дугами окружности*

$$\left\{1 + \frac{4\tau z_0}{1 - 2yz_0 + z_0^2} : y \in [2\tau - 1, 1]\right\}$$

и

$$\left\{\frac{(z_0+1)^2(1 + z_0(-4 + 4\tau - 2 + z_0))}{(z_0-1)^2(1 - 2xz_0 + z_0^2)} : x \in [-1, 2\tau - 1]\right\}$$

при отображении $w \to \frac{\sqrt{w}-1}{\sqrt{w}+1}$.

Заметим, что области значений $V_{\mathscr{S}(\tau)}(z_0)$ для всех аналитических функций и для однолистных функций с вещественными коэффициентами Тейлора совпадают. Обозначим через $\mathscr{R}^{\geqslant}$ класс всех аналитических фунцкий, отображающих в себя f из $\mathbb{D}$, нормированных как $f(0) = 0, f'(0) \geqslant 0$ и имеющих только вещественные коэффициенты Тейлора вокруг начала координат. Пусть

$$V_{\mathscr{R}^{\geqslant}}(z_0) = \{f(z_0) : f \in \mathscr{R}^{\geqslant}\}.$$

Теорема 12. *Пусть* $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$. *Тогда* $V_{R^{\geqslant}}(z_0)$ *- замкнутая выпуклая область, ограниченная следующими тремя кривыми:*

$$A = \left\{\frac{z_0(z_0 - x)}{z_0x - 1} : x \in [0,1]\right\}, \quad B = \left\{\frac{z_0(z_0 + x)}{z_0x + 1} : x \in [0,1]\right\},$$

$$C = \left\{\frac{z_0^2(z_0 + 2x - 1)}{1 + 2xz_0 - z_0} : x \in [0,1]\right\}.$$

Теорема 13. *Пусть* $f \in Hol(\mathbb{D},\mathbb{D})\backslash\{id_{\mathbb{D}}\}$ *и* $T > 0$.

$(i) f$ однолистна в $\mathbb{D}$;

(ii) точка Денжуа - Вольфа для f равна $\tau = 1$;

$(iii) \sigma = -1$ является регулярной граничной неподвижной точкой f и $f'(-1) = e^T$.

Тогда

$$f(z_0) \in \mathscr{V}(z_0, T) := \ell^{-1}(V(\ell(z_0), T)) \setminus \{z_0\} \text{для любой} z_0 \in \mathbb{D}.$$

Этот результат является точным, т. е. для любого $w_0 \in \mathscr{V}(z_0, T)$ существует $f \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \{id_{\mathbb{D}}\}$, удовлетворяющий $(i)\breve{}(iii)$ и такой, что $f(z_0) = w_0$.

Теорема 14. *Для любого $w_0 \in \partial\mathscr{V}(z_0, T) \setminus \{z_0\}$ существует единственное $f = f_{w_0}$ удовлетворяя условиям $(i) - (iii)$ в задаче области значений для однолистных самосопряжений $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ с двумя граничными неподвижными точками ± 1 и такими, что $f_{w_0}(z_0) = w_0$. Если $w_0 = l^{-1}(\zeta_0 + T)$, то f_{w_0} - гиперболический автоморфизм $\mathbb{D}$, а именно, $f_{w_0} = l^{-1}(l(z) + T)$. В противном случае f_{w_0} - это конформное отображение $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$ без разреза вдоль аналитической Жордановой дуги γ, ортогональной $\partial\mathbb{D}$ с $f'_{w_0}(1) = 1$. Кроме того, $f_{w_0} = h_1 \circ p_\alpha \circ h_2$ для некоторых $h_1, h_2 \in Aut(\mathbb{D})$ и $\alpha(0, 1)$ тогда и только тогда, когда*

$$w_0 = \ell^{-1} \left(x_1^0 + \frac{T}{2} + i \arcsin a_\pm(T) \right).$$

Теорема 15. *Пусть $\mathfrak{B}[q; a]$ обозначим класс однолистных голоморфных собственной карты $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ с Данжуа – Вольфа точки Q и границы регулярные фиксированные точки A и пусть $\{f^t\}_{t \geqslant 0}$ является параметрической полугруппой с одним параметром $f \to f^t$ что является решением дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial f^t(z)}{\partial t} = v(f^t(z)), \quad f^t(z)|_{t=0} = z.$$

Тогда $\{f^t(z)\}_{t \geqslant 0} \subset \mathfrak{B}[q; a]$, тогда и только тогда, когда

$$v(z) = \alpha(q - z)(1 - \overline{q}z)(1 - \overline{a}z)h(\overline{a}z),$$

где $\alpha \geqslant 0$ *и*

$$h(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-æ}{1-æz} d\mu(æ)$$

с вероятностной мерой μ *на* $\partial\mathbb{D}$.

Теорема 16. *Пусть* $\mathscr{M}_n$ *- область значений коэффициента для* $\tilde{S}$ *и пусть* $L_1, ..., L_n$ *- векторные поля, определяемые*

$$L_j = \partial_j + \sum_{k=1}^{n-j} (k+1) a_k \partial_{j+k}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial a_j}.$$

Тогда система (L_1, L_2) *удовлетворяет условию формирования скобок, и распределение является* $\mathscr{D} = span(L_1, L_2)$.

Комплексная размерность Хаусдорфа субриманова многообразия $\mathscr{M}_n$ *равна* $(\frac{n}{2}+1)^2 - \frac{9}{2}$ *для нечетного числа* n *и равна* $(\frac{n}{2}+1)^2 - 2$ *для четного* n.

Заключение. В ходе выполнения работы был расммотрен параметрический метод Левнера, заключающийся в использовании уравнения Левнера для решения экстремальных задач. Также были рассмотрены методы оптимизации, в частности, принцип максимума Понтрягина.