МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Структуры эквивалентностей

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 –Математика и компьютерные науки
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

БОРИСОВА ДМИТРИЯ ОЛЕГОВИЧА
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель доцент, к.ф.-м.н.		В.Е. НОВИКОВ
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия
Зав. кафедрой профессор, д.ф.-м.н., профессор		В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2020

Введение. Бинарные отношения служат простым и удобным аппаратом для весьма широкого круга задач. Язык бинарных отношений используется во многих прикладных (для математики) областях, например, таких как математическая лингвистика, математическая биология, математическая теория баз данных. Широкое использование языка бинарных отношений легко объясняется – геометрический аспект теории бинарных отношений есть попросту теория графов.

В обыденной речи мы часто говорим об одинаковости (о равенстве) каких-то объектов (предметов, множеств, абстрактных категорий), не заботясь о надлежащем уточнении смысла, который мы вкладываем в слово "одинаковый".

Не менее важной является ситуация, когда нам приходится устанавливать сходство объектов. Если одинаковость объектов означает их взаимозаменимость в некоторой ситуации, то сходство – это частичная взаимозаменимость, т.е. возможность взаимной замены с некоторыми (допустимыми в данной ситуации) потерями, с допустимым риском.

Целью данный дипломной работы является изучение структуры эквивалентностей.

Для выполнения данный дипломной работы были выполнены следующие шаги.

1) Описать, что такое бинарное отношение.

В первой главе рассказывается, что такое бинарное отношение опирации над ними свойства и способы задания, а именно матрица, граф, перечисление...

2) Рассказать, что такое классы эквивалентсностей.

Во второй главе рассказываестя об отношении квазипорядка, толерантности, эквивалентсноти и порядка.

3) Рассказать про эквивалентные замыкания кончных бинарных отношений.

В третьей главе рассказывается об классах эквивалентности, фактор-множествах и об устойчивости экввиваленотсти.

Основное содержание работы содержит 5 разделов

1. Введение

2. Бинарные отношения.

3. Классификация бинарных отношений.

4. Эквивалентные замыкания конечных бинарных отношений.

5. Заключение.

В **введении** формулируется цель и задачи для достижения цели.

Первая посвящена бинарным отношениям. В ней даны основные определения, свойства бинарныз отношений, способы задания бинарных отношений, опирации над бинарными отношениями.

Определение 1.10. Бинарным отношением называется любое множество упорядоченных пар.

Из определения следует, что бинарным отношением является любое подмножество прямого произведения двух множеств. Если r — бинарное отношение и $\langle x, y \rangle \in r$, то говорят, что x и y связаны отношением r, или что элемент x находится в отношении r к , или что для x и выполняется отношение r.

Вместо записи $\langle x, y \rangle \in r$ часто используют более простую xry, которая также является записью утверждения, что элементы x и y связаны отношением r.

График отношения изображается в декартовой системе координат: на горизонтальной оси отмечается область определения, а на вертикальной область значений отношения. Элементу отношения (x, y) соответствует точка плоскости с этими координатами.

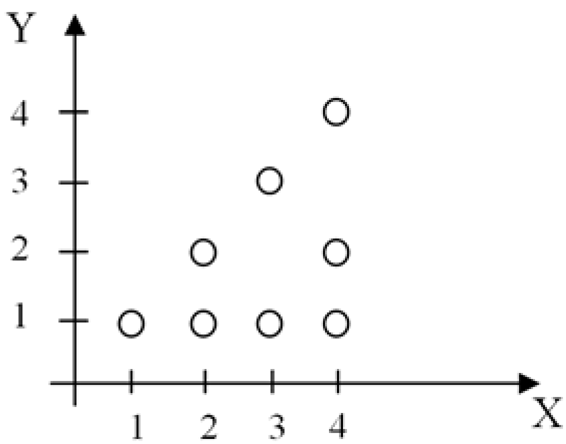

Рисунок 1.8. График отношения.

Схема отношения изображается с помощью двух вертикальных прямых, левая из которых соответствует области определения отношения, а правая –

множеству значений отношения. Если элемент (x, y) принадлежит отношению r, то соответствующие точки из $DomR$ и ImR соединяются прямой.

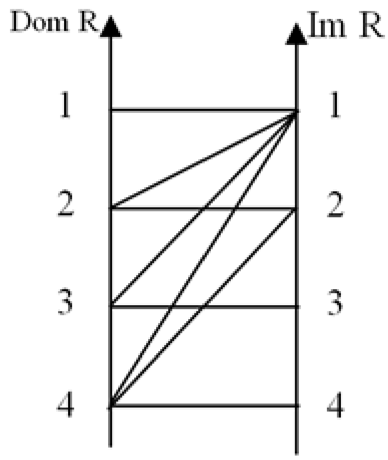

Рисунок 1.9. Схема отношения.

Граф отношения $r \subset X \times X$ строится следующим образом. На плоскости в произвольном порядке изображаются точки - элементы множества X. Пара точек x и y соединяется дугой (линией со стрелкой) тогда и только тогда, когда пара (x, y) принадлежит отношению r.

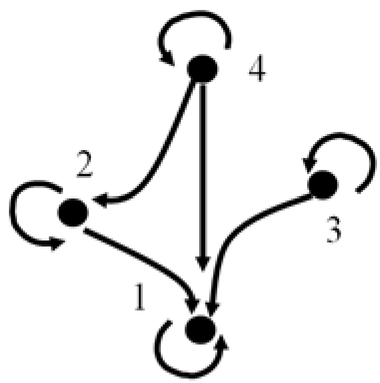

Рисунок 1.10. Граф отношения.

Матрица отношения $r \subset X \times X$ – это квадратная таблица, каждая строка и столбец которой соответствует некоторому элементу множества X. На пересечении строки x и столбца y ставится 1, если пара $(x, y) \in r$; все остальные элементы матрицы заполняются нулями. Элементы матрицы нумеруются двумя индексами, первый равен номеру строки, второй – номеру столбца.

p	1	2	3
1	1	0	1
2	0	0	0
3	1	1	0

Рисунок 1.12. Матрица отношения.

Определение 1.15. Отношение p на множестве X называется рефлексивным, если для любого $x \in X$ имеет место xpx , то есть каждый элемент находится в отношении p к самому себе.

Матрица рефлексивного отношения имеет единичную главную диагональ.

p	1	2	3	4	5
1	1				
2		1			
3			1		
4				1	
5					1

Рисунок 1.13. Матрица рефлексивного отношения

Граф рефлексивного отношения имеет петлю возле каждого своего элемента.

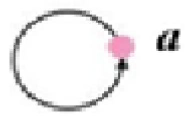

Рисунок 1.14. Граф рефлексивного отношения

Определение 1.16. Отношение p на множестве X называется антирефлексивным, если не существует $x \in X$ такого, что имеет место xpx , то есть ни один элемент не находится в отношении p к самому себе.

Матрица антирефлексивного отношения имеет нулевую главную диагональ.

p	1	2	3	4	5
1	0				
2		0			
3			0		
4				0	
5					0

Рисунок 1.15. Матрица антирефлексивного отношения

Граф антирефлексивного отношения не имеет ни одной петли.

Рисунок 1.16. Граф антирефлексивного отношения

Определение 1.17. Отношение p на множестве X называется симметричным, если для всех x и y из , из принадлежности (x, y) отношению p следует, что и (y, x) принадлежит отношению p.

Матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали.

p	1	2	3	4	5
1		1			
2	1			1	
3					
4			1		
5					

Рисунок 1.17. Матрица симметричного отношения

Граф симметричного отношения это когда для каждой дуги (x, y) существует обратная дуга (y, x).

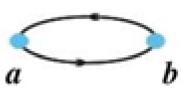

Рисунок 1.18. Граф симметричного отношения

Определение 1.18. Отношение p на множестве X называется антисимметричным, если для всех x и y из , из принадлежности (x, y) и (y, x) отношению p следует, что $x = y$.

Матрица антисимметричного отношения не имеет ни одной симметричной единицы относительно главной диагонали.

p	1	2	3	4	5
1		0			
2	1			0	
3					
4			1		
5					

Рисунок 1.19. Матрица антисимметричного отношения

Граф антисимметричного отношения это когда для каждой дуги (x, y) не существует обратная дуга (y, x) и наоборот.

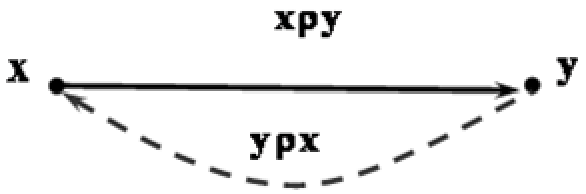

Рисунок 1.20. Граф антисимметричного отношения

Свойства симметричности и антисимметричности не являются взаимоисключающими, примером может служить отношения равенства на множестве натуральных чисел.

Определение 1.19. Отношение p на множестве X называется транзитивным, если для всех x,y,z из множества X , из принадлежности (x, y) и (y, z) отношению p следует, что (x, z) также принадлежит p.

p	1	2	3	4	5
1			1	1	
2	1				
3		1			
4					1
5	1				

Рисунок 1.21. Матрица транзитивного отношения

Рисунок 1.22. Граф транзитивного отношения

Определение 1.20. Объединением отношений p и τ называется множество упорядоченных пар, которое принадлежит p или τ, другими словами $p \cup \tau = \{(a, b) | (a, b) \in p \vee (a, b) \in \tau\}$.

Определение 1.21. Пересечением отношений p и τ называется множество упорядоченных пар, которое принадлежит p и τ, другими словами $p \cap \tau = \{(a, b) | (a, b) \in p \wedge (a, b) \in \tau\}$.

Для выполнения этой операции при табличной форме задания отношения p и τ необходимо матрицы поэлементно умножить. После чего получим

$$p \cap \tau = \begin{array}{c|c|c|} & b_1 & b_1 \\ \hline a_1 & 1 & 0 \\ \hline a_2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Рисунок 1.27. Табличная форма отношения $p \cup \tau$

Определение 1.22. Разностью отношений p и τ называется множество упорядоченных пар, которое принадлежит p, но не τ, другими словами $p \setminus \tau = \{(a, b) | (a, b) \in p \wedge (a, b) \notin \tau\}$.

Определение 1.23. Отношение p^{-1} называется обратным к p, если $p^{-1} = \{(b, a) | apb\}$.

Для выполнения этой операции при табличной форме задания отношения p^{-1} необходимо в матрице a_{ij} поменять столбцы со строками

$$\rho^{-1} = \begin{array}{c|c|c|} & a_1 & a_2 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ \hline b_2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Рисунок 1.30. Табличная форма отношения $p \setminus \tau$

Определение 1.24. Композицией отношений p и τ называется множество упорядоченных пар, которое $p \circ \tau = \{(a,c)|apb, b\tau c, a \in A, b \in B, c \in C\}$.

Упражнение 1.1. Для любых бинарных отношений p, q и r выполняются следующие свойства:

1) $(p^{-1})^{-1} = p$
2) $(p \circ q)^{-1} = q^{-1} \circ p^{-1}$
3) $(p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r)$

Упражнение 1.2. Для матричной формы задания конечных отношений выполняются следующие свойства:

1) $\rho = \sigma \Leftrightarrow M(\rho){=}M(\sigma)$
2) $M(\rho \cup \sigma) = M(\rho) + M(\sigma)$
3) $M(\rho \cap \sigma) = M(\rho) \wedge M(\sigma)$
4) $\overline{\rho} = [M(\rho)]'$
5) $M(\emptyset) = 0$.
6) $M(A \times A) = 1$.
7) $M(\Delta_A) = E$.
8) $M(\rho^{-1}) = [M(\rho)]^T$.
9) $M(p \circ \sigma) = M(p) \cdot M(\sigma)$

Вторая глава посвящена классификации бинарных отношений.

Определение 2.1. Бинарное отношение $\preceq$ называется отношением квазипорядка, если оно рефлексивно и транзитивно.

Определение 2.2. Бинарное отношение называется отношение порядка (или отношением частичного порядка), если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Определение 2.4. Отношение r на множестве M называется отношением толерантности или толерантностью, если оно рефлексивно и симметрично.

Определение 2.5. Множество M с заданным на нем отношением толерантности τ называется пространством толерантности. Таким образом, пространство толерантности есть пара (M, τ).

Определение 2.6. Бинарное отношение определенное на множестве называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет свойствам рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Третья глава посвящена исследованию структуры отношений эквивалентности и построению эквивалентного замыкания.

Определение 3.1. Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности $\sim$ и - элемент этого множества. Классом эквивалентности элемента называется подмножество в X, состоящее из всех элементов, эквивалентных относительно $\sim$.

Определение 3.2. Фактор-множеством множества по отношению эквивалентности R называется множество A/R всех классов эквивалентности.

Определение 3.3. Разбиением множества называется такое семейство его непустых подмножеств, что каждый элемент множества A входит в точности в один член семейства.

Другими словами, разбиение множества A есть семейство его непустых подмножеств, объединение которых совпадает с множеством A, а пересечение любых двух из них пусто.

Теорема 3.1. Пусть r — отношение эквивалентности на (непустом) множестве . Тогда фактор-множество A/r является разбиением множества .

Теорема 3.2. Отношение эквивалентности устойчиво относительно пересечения множеств.

Из доказанной теоремы следует, что пересечение эквивалентностей из произвольной непустой (возможно бесконечной) совокупности есть эквивалентность.

Теорема 3.3. Пусть α и β — эквивалентности. Тогда если для любой пары смежных классов по α и, соответственно, по β справедливо утверждение: «либо один из классов лежит в другом, либо они не пересекаются», то $\alpha \cup \beta$ есть эквивалентность. Если $\alpha \cup \beta$ — эквивалентность, то $\alpha \cup \beta = \alpha\beta$.

Определение 3.4. Наименьшая эквивалентность $\varepsilon(\rho)$, содержащая отношение ρ, называется эквивалентным замыканием ρ.

Теорема 3.4. Для произвольного однородного отношения ρ справедливо $\rho^t = \rho$

Следствие 3.1 Для произвольного однородного отношения ρ справедливо $\varepsilon(\rho) = \left\{\rho \cup \rho^{\#} \cup M\right\}^t$.

Следствие 3.2 Эквивалентное замыкание совокупности эквивалентностей совпадает с объединением всевозможных произведений этих эквивалентностей.

Таким образом, заключительные результаты можно объединить и записать в виде следующих утверждений:

Для произвольного бинарного отношения $\rho \subseteq A \times A$ обозначим $\varepsilon(\rho)$ наименьшее по включению отношение эквивалентности, содержащее данное отношение ρ.

Определение 3.5. Наименьшее отношение эквивалентности $\varepsilon(\rho)$ это такое отношение, что любое отношение эквивалентности σ, содержащее отношение ρ, будет содержать в себе и $\varepsilon(\rho)$.

$$\varepsilon(\rho) = \bigcap_{p \subseteq \sigma} \{\sigma | \sigma \in E(A)\}.$$

Теорема 3.5.(О наименьшем отношении эквимвалентности)

Наименьшим отношением эквивалентности, содержащим заданное отношение $\rho \subseteq A \times A$, является отношение:

$$\varepsilon(\rho) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\rho \cup \rho^{-1})^n$$

Следсвтвие 3.3 Если $(p, \sigma \in E(A)$, то

$$\varepsilon(\rho \cup \sigma) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\rho \cup \sigma)^n$$

Если рассматриваются отношения на конечном множестве A, то формула вычисления из теоремы (3.5) не будет содержать бесконечное объединение, это объединение стабилизируется, т.е. с некоторого значения n не будет изменяться.

Каждому отношению $\rho \subseteq A \times A$ на конечном множестве $A = a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно однозначно поставить в соответствие двоичную булеву матрицу

$M(\rho) \in M_{n\times m}B_2$ (над двоичной булевой алгеброй) по следующему правилу:

$$(M(\rho))_{ij} := \begin{cases} 1, (a_i, a_j) \in \rho \\ 0, (a_i, a_j) \notin \rho \end{cases}$$

Таким образом, инструмент булевой алгебры позволяет сводить действия с отношениями к действиям над соответствующими матрицами, а операции над матрицами легко и эффективно можно выполнять на компьютере.

В булевых матрицах для конечных отношений эти результаты примут следующий вид.

Утверждение 3.1. В булевых матрицах для конечного отношения ρ имеет место следующая формула:

$$M(\varepsilon(\rho)) = \sum_{i=0}^{n} (M(\rho) + [M(\rho)]^T)^i$$

Утверждение 3.2. Если ρ и σ являются конечными отношениями эквивалентности, то

$$M(\varepsilon(\rho \cup \sigma)) = \sum_{i=1}^{n} (M(\rho) + M(\sigma))^i$$

Заключение. В ходе выполнения данной работы мы изучили структуры эквивалентностей. Так же в первой главе мы изучили бинарные отношения, а именно были даны определения множества, декартова произведения, декртовой степени, определение бинарного отношения, были рассмотрены опирации бинарных отношений, свойства. Во второй главе мы рассмотрели какие бывают классификации отношений, а именно: квазипорядока, порядока, толерантности и экививалентности. В третией главе рассказывается о эквивалентных замыканиях конечных бинарных отношений. Было рассмотрено, что такое класс эквивалентности, фактормножество, устойчивость эквивалентности, а так же эквивалетные замыкания, где рассматривается минимальная эквивалентность и формулы для ее нахождения.

Моей задачей также было написание программы, которая бы реализовала эти формулы и вычисляла бы эквивалентное замыкание. Но с этой задачей я не справился.