МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Моделирование крунодальных кубик на коевклидовой плоскости

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

ЕРЕМИНА АЛЕКСЕЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель доцент, к.ф.-м.н., доцент		Л.Н. РОМАКИНА
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия
Зав. кафедрой профессор, д.ф.-м.н., профессор		В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2020

Введение. Учение о кубических кривых впечатляет своей богатой историей. К примеру, труд[1] Исаака Ньютона о классификации кубик, датирован 1704-м годом, а библиографический список известного справочного пособия авторов А. С. Смогоржевского и Е. С. Столовой[2] по кривым третьего порядка сожержит 1001 наименование. Исследованию кубических кривых посвящали свои работы многие известные ученые, в их числе А. А. Глаголев, Г. Грассман, Ж. Дьедоне, А. П. Котельников, А. Клебш, Г. Крамер, Л. Кремона, А. Кэли, А. Лагранж, Х. А. Лоренц, А. Ф. Мёбиус, Б. Б. Мордухай-Болтовский, Ю. Плюккер, А. Пуанкаре, Ж. В. Понселе, Г. Сальмон , Я. Штейнер, А. Якоби и многие другие (библиографические сведения о работах указанных авторах, посвященных кубическим кривым, представлены в Приложении 2).

Кубические кривые имеют широкую область применения. Например, с помощью кубических кривых частного вида (трисектрис) решена классическая задача построения луча, делящего данный угол на три равные части. Традиционно различные кубические кривые применяют в архитектуре и машиностроении. На современном этапе интерес математиков к кубическим кривым существенно возрастает в связи с тем, что кубики частного вида, эллиптические кривые, нашли применение в криптографии, им посвящена одна из задач тысячелетия, так называемая Гипотеза Бёрча – Свиннертон-Дайера, за решение которой институт Клэя предлагает вознаграждение в 1 млн. долларов. В связи с проблемой распознавания объектов и развитием математических методов их визуализации усиливается интерес к проективным свойствам кубик и способам их построения, а также к

[1] Савелов, А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения / А.А. Савелов. — М.:ФИЗМАЛТИТ, 1960. - 296 с.

[2] Смогоржевский, А.С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка / А.С. Смогоржевский, Е.С. Столова — М.: ФИЗМАЛТИТ, 1961. - 271 с.

исследованию кубических кривых в различных неевклидовых геометриях. Именно этому направлению исследований соответствует выпускная работа.

Основная цель работы — изучение и моделирование крунодальных кубик в коевклидовой плоскости. Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие задачи:

1) изложены необходимые сведения об алгебраических кривых, в частности, о кривых тртьего порядка;

2) изложены основы коевклидовой геометрии;

3) исследованы аналог верзиеры Аньези в коевклидовой плоскости;

4) приведен алгоритм поточечного построения крунодальных кубик;

5) подготовлена программа реализации алгоритма поточечного построения крунодальных кубик.

Работа состоит из введения, трех основных разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 15 наименований, и двух приложений. В первом разделе работы на основании справочных изданий введено понятие алгебраической кривой и кратко представлена классификация Ньютона алгебраических кривых третьего порядка, а также рассмотрена одна из замечательных кривых евклидовой плоскости — верзиера Аньези. Во втором разделе работы введено понятие проективного пространства, по работам[3][4] систематизированы и описаны основные факты его геометрии, на основании материалов книг[5][6][7] введены основные понятия геометрии коевклидовой плоскости в её проективной интерпретации Кэли –

[3]Атанасян, Л. С. Геометрия. В 2 т. Т. 2. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. / Л. С. Атанасян, В.Т. Базылев — М.: Просвещение, 1987. - 352 с.

[4]Ромакина, Л.Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны. В 4 т. Т.1. Тригонометрия / Л.Н. Ромакина. — Саратов: изд. Саратовского университета, 2013. - 244 с.

[5]Ромакина, Л.Н. Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей / Л.Н. Ромакина. — Саратов: Научная книга, 2008. - 279 с.

[6]Розенфельд, Б.А. Неевклидовы геометрии / Б.А. Розенфельд — М.: ГИТТЛ, 1955. - 744 с.

[7]Розенфельд, Б.А. Неевклидовы пространства / Б.А. Розенфельд — М.: Наука, 1969. - 548 с.

Клейна. В третьем разделе предложено определение верзиеры Аньези и ее исследование по каноническому уравнению на коевклидовой плоскости. Представлено более подробное по сравнению с оригинальным источником[8] доказательство того факта, что на коевклидовой плоскости один из аналогов верзиеры Аньези является кубической кривой с узлом в вещественной точке абсолюта. В конце третьего раздела приведен алгоритм поточечного построения крунодальных кубик на проективной плоскости, предложенный и обоснованный в работе[9].

В Приложении 1 работы приведен код программы реализации алгоритма построения крунодальной кубики проективной плоскости, подготовленной на языке Java Script. Приложение 2 содержит библиографическое описание классических работ о кривых третьего порядка наиболее известных на современном этапе математиков.

Основной метод исследования — метод координат на проективной, евклидовой и коевклидовой плоскостях. Коевклидова плоскость в работе рассматривается в проективной интерпретации Кэли – Клэйна.

Результаты работы доложены на заседании кафедры геометрии в формате google meet. Средство программной визуализации алгоритма построения крунодальных кубик опубликовано на сайте http://v90631y1.beget.tech/.

Основное содержание работы. На евклидовой плоскости E_2 *алгебраической кривой n-го порядка* назовем множество всех точек этой плоскости, координаты которых в некоторой аффинной системе координат можно за-

[8] Romakina, L. N. Modeling of Curls of Agnesi in Non-Euclidean Planes / L. N. Romakina, L. V. Bessonov, A. A. Chernyshkova // AIP Conference Proceedings. - 2018. - Vol. 2037. - P. 020022-1–020022-6.

[9] Romakina, L. N. Construction of cubic curves with a node / L. N. Romakina // Beiträge zur Algebra und Geometrie. - 2019. Vol. 60 - P. 761-781.

писать в следующем виде:

$$A_0x^n + A_1x^{n-1}y + A_2x^{n-2}y^2 + ... + A_ny^n +$$
$$+ B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2}y + B_2x^{n-3}y^2 + ... + B_{n-1}y^{n-1} +$$
$$+ C_0x^{n-2} + C_1x^{n-3}y + ... + C_{n-2}y^{n-2} +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ L_0x + L_1y + M = 0,$$

где коэффициенты A_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, не равны нулю одновременно.

Если левая часть уравнения кривой разлагается на множители $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, ..., то такому уравнению будет соответствовать система кривых $\varphi_1(x, y) = 0$, $\varphi_2(x, y) = 0$, ... В этом случае кривую n-го порядка назовем *распадающейся* или *приводимой*.

Первая классификация кривых 3-го порядка была выполнена Ньютоном. Общее уравнение алгебраической кривой 3-го прядка записывается в виде:

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + 6Fxy +$$
$$+ 3Gy^2 + 3Hx + 3Ky + L = 0$$

Ньютон указал, что для любой кубики можно так подобрать систему координат, что она будет иметь одно из следующих уравнений:

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$
$$xy = ax^3 + x^2 + cx + d;$$
$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx = d;$$
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Ньютон подразделил все кубики на 7 групп, 14 родов и 78 типов.

Выберем произвольную окружность ω, радиуса a. Пусть V, T — диаметрально противоположные точки этой окружности, а v, t — касательные к окружности ω в точках V и T соответственно. Предположим, что произвольный луч VX пересекает окружность ω в точке C, а прямую t — в точке D. Пусть c — прямая, которая проходит через точку C ортогонально прямой VT. Пусть d — прямая, которая проходит через точку D, ортогонально прямой v. Точку пересечения прямых c и d обозначим M. Когда луч VX вращается вокруг точки V, точка M описывает кривую, названную *локоном Аньези*.

Каноническое уравнения этой кривой имеет вид:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.$$

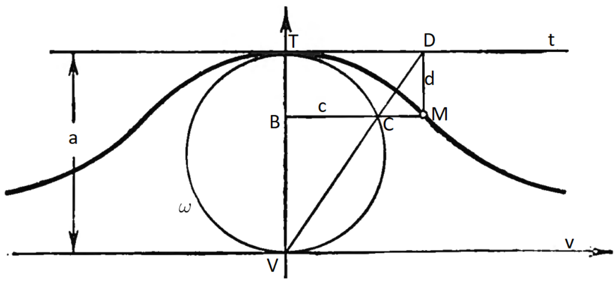

Рис. 1.1: Верзиера Аньези.

Для того, чтобы дать проективную интерпретацию коевклидовой плоскости, вводится понятие проективной плоскости.

Пусть L_{n+1} — $(n+1)$-мерное векторное пространство. L^*_{n+1} — множество всех ненулевых векторов пространства L_{n+1}. Непустое множество P_n назовем *проективным пространством* n измерений, порожденным векторным пространством L_{n+1}, если задано отображение $f : L^*_{n+1} \to P_n$, удовлетворяющее условиям:

1) f—сюръективное отобранеие;

2) равенство $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ выполняется тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ коллинеарны: $\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{y}$.

Проективным репером плоскости P_2 назовем упорядоченную систему точек $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$. Систему векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}$, порождающих вершины A_1, A_2, A_3, E репера R, назовем *согласованной относительно репера* R, если $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$. Пусть X — произвольная точка P_2, порожденная вектором $\boldsymbol{x}$ пространства L_3, а $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}$ — система векторов, согласованная относительно репера $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$. Разложим вектор $\boldsymbol{x}$ по некомпланарным векторам $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3$.

Числа x_1, x_2, x_3 назовем *проективными координатами точки X в репере R*.

Проективным преобразованием плоскости P_2 назовем линейное взаимно однозначное преобразование этой плоскости, т.е. преобразование, в котором каждой точке M с координатами (x_p) в некотором проективном репере R соответствует точка M' с такими координатами (x'_p) в репере R, что

$$\mu x'_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3,$$

где $det\|a_{pq}\| \neq 0$, $a_{pq} \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$,$\mu \neq 0$.

Теорема 2.2.1. Все проективные преобразования плоскости P_2 образуют группу.

Для построения проективных моделей неевклидовых геометрий и исследования различных объектов, например, линий второго порядка, необходимо расширить понятие проективной плоскости.

Точкой проективной плоскости назовем любую ненулевую упорядоченную тройку чисел (x_p), где $x_p \in \mathbb{C}$. Числа x_p назовем *координатами* точки. Точку (x_p) назовем *вещественной*, или *действительной*, если все числа x_p действительные или можно найти такое ненулевое комплексное число λ, что все числа λx_p действительные. В противном случае точку назовем *мнимой*. Точки (x_p) и (y_p) плоскости P_2 назовем *мнимо сопряженными*, если для каждого значения p числа x_p и y_p являются комплексно-сопряженными.

Далее проективную плоскость P_2 будем считать пополненной всеми мнимыми точками.

Множество всех точек плоскости P_2, координаты которых в некотором проективном репере $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ удовлетворяют однородному уравнению второй степени

$$b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 = 0, \qquad (2.2)$$

назовем *линией второго порядка* плоскости P_2.

Пусть линия α второго порядка задана уравнением (2.2).

Набор из шести чисел b_{pq}, заданный с точностью до общего ненулевого числового множителя, назовем *координатами* линии. Симметричную матрицу $\|b_{pq}\|$ назовем *матрицей координат* линии α, ранг r матрицы $\|b_{pq}\|$ — *рангом* линии α.

Линию второго порядка ранга r назовем *невырожденной* (*вырожденной*), если $r = 3 (r < 3)$. На плоскости P_2 в зависимости от ранга и наличия вещественных точек различают пять проективно различных типов линий второго порядка: *нулевая линия* (рис. 2.1, а), *овальная линия* (рис. 2.1, б), *пара мнимо сопряженных прямых* (рис. 2.1, в), *пара различных действительных прямых* (рис. 2.1, г), *пара совпавших действительных прямых (или дважды взятая действительная прямая)* (рис. 2.1, д).

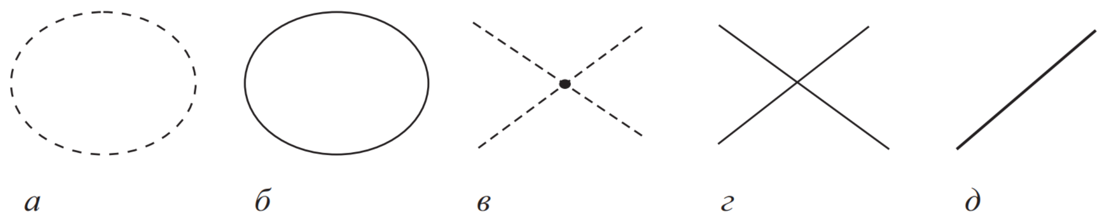

Рис. 2.1: Линии второго порядка на проективной плоскости.

Группа евклидовых преобразований плоскости является подгруппой группы проективных преобразований, относительно которой инвариантны действительная прямая и пара комплексно сопряженных, так называемых *циклических*, точек на ней.

Фигуру, инвариантную относительно группы преобразований некоторой плоскости, будем называть *абсолютом* этой плоскости. Абсолют евклидовой плоскости – действительную прямую с парой принадлежащих ей комплексно сопряженных точек – обозначим $A^{\text{П}}_{\text{Э}}$. По малому принципу двойственности абсолюту евклидовой плоскости соответствует вырожденная линия второго порядка – пара комплексно сопряженных прямых, пересекающихся в действительной точке. Обозначим эту фигуру $A^{\text{Э}}_{\text{П}}$.

Проективную плоскость P_2 с фиксированной вырожденной квадрикой $A^{\text{Э}}_{\text{П}}$ назовем *коевклидовой плоскостью*. Вырожденную квадрику $A^{\text{Э}}_{\text{П}}$ будем называть *абсолютной квадрикой*, или *абсолютом* коевклидовой плоскости. Точки множества $K_2 = P_2 \setminus A^{\text{Э}}_{\text{П}}$ назовем *собственными точками* коевклидовой плоскости, а точки самой квадрики — *несобственными*, или *абсолютными*, или *бесконечно удаленными точками* коевклидовой плоскостио.

Коокружность, в некотором смысле, является аналогом евклидовой окружности, поскольку обладает, например, следующим свойством: любая точка плоскости E_2^* при движении с некоторой неподвижной эллиптической прямой движется по коокружности. Поэтому мы рассматриваем коокружность как основу для построения верзиеры Аньези. В каноническом репере R плоскости E_2^* коокружность может быть задана уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - \alpha^2 x_3^2 = 0, \ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Аналог верзиеры Аньези коевклидовой плоскости определим следующим образом.

Определение 3.1.1. Выберем на плоскости E_2^* произвольную коокружность ω. Пусть V, T — диаметрально противополжные точки коокружности ω. Тогда точки V, T и A_3 лежат на одной прямой. Пусть C — произвольная точка коокружности ω, а D — точка пересечения секущей прямой VC с касательной t к коокружности ω в точке T. Пусть S — полюс прямой VT относительно ω, а d — параболическая прямая, ортоганальная прямой A_3D. Предположим, что M является точкой пересечения прямых CS и d. Когда точка C описывает окружность ω, точка M описывает линию, которую назовем верзиерой Аньези коевклидовой плоскости.

Если кривая σ построена согласно определению 1, а коокружность ω задана уравнением (3.1) в каноническом репере R плоскости E_2^*, то можно получить уравнение кривой

$$x_1^3 + \alpha x_1^2 x_3 + 4x_1 x_2^2 - 4\alpha x_2^2 x_3 = 0. \qquad (3.2)$$

Назовем эту кривую *верзиерой Аньези.*

Кубическая кривая σ с уравнением (3.2) является крунодальной кубической кривой с узлом в вещественной абсолютной точке $A_3(0:0:1)$. Следовательно, конечная для плоскости E_2^* часть линии σ состоит из двух связных ветвей. Одна из этих ветвей гомеоморфна евклидовой окружности с одной выколотой точкой. Назовем эту ветвь *петлей* верзиеры Аньези. Вторая ветвь гомеоморфна проективной прямой с одной выколотой точкой. Назовем эту ветвь *лентой* верзиеры Аньези.

Чтобы изобразить кривую σ (3.2) на евклидовой плоскости, заменим проективные координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$ евклидовыми декартовыми координатами (x, y) по формулам

$$x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3},$$

принимая координатную прямую A_1A_2 репера R за бесконечно удаленную, т. е. абсолютную прямую евклидовой плоскости.

После такой замены уравнение линии σ примет вид

$$x^3 + \alpha x^2 + 4xy^2 - 4\alpha y^2 = 0,$$

а вещественная точка абсолюта A_3 совпадет с началом O системы координат Oxy.

В работе [9] был предложен алгоритм поточечного построения кубических кривых с узловой точкой. Алгоритм имеет универсальный характер, т.к. построение предлагается на проективной плоскости. В данной выпускной работе данный алгоритм адаптирован на коевклидовой плоскости для построения верзиеры Аньези. Опишем кратко указанный алгоритм.

Выберем коллинеарные точки V, P, O, Q проективной плоскости P_2. Прямую, содержащую эти точки, обозначим $\widetilde{l}$. Предположим, что $V \neq O$, $V \neq P$ и $(VPOQ) \neq -1$, т. е. пара точек (V, P) гармонически разделяет пару точек (O, Q). Пусть $\widetilde{k}$ и $\widetilde{h}$ — действительные прямые, содержащие точку O. Предположим, что точка H, $H \neq O$, лежит на прямой $\widetilde{h}$. Пусть B_1 — произвольная точка прямой $\widetilde{h}$ и B_2 — такая точка, что четверка точек H, B_1, O, B_2 является гармонически сопряженной, т. е.

$$(HB_1OB-2) = -1.$$

Обозначим общую точку прямых PB_1 и $\widetilde{k}$ через S и построим конику ω, которая однозначно определена следующими условиями:

1) точка O принадлежит ω;

2) прямая $\widetilde{l}$ является касательной к ω;

3) точка B_2 принадлежит ω;

4) прямая QB_2 является касательной к ω;

5) точка S принадлежит ω.

Обозначим общие точки прямой VB_1 и ω через M_1 и M_2. Когда прямая VB_1 вращается вокруг точки V, точки M_1 и M_2 описывают кривую. Обозначим её σ. Множество $\Theta = \{O, V, P, Q, H, \widetilde{k}\}$ назовем *генерирующим набором* кривой σ.

Заключение. В работе приведен пример моделирования кубических кривых с узловой точкой на коевклидовой плоскости, геометрия которой соответствует геометрии евклидовой плоскости по принципу двойственности плоскости проективной. Известно, что на евклидовой плоскости замечательная кривая верзиера Аньези является кубической кривой с изолированной точкой на бесконечности. В данной работе показано, что один из возможных аналогов верзиеры Аньези на плоскости коевклидовой является крунодальной кубикой с узлом в вещественной точке абсолюта.

Чтобы провести полноценный анализ проведенного исследования, потребовалось познакомиться с общей теорией кривых третьего порядка, основами проективной геометрии и геометрией коевклидовой плоскости.

В первом разделе выпускной работы рассмотрено понятие алгебраической кривой, приведена классификация Ньютона алгебраических кривых третьего порядка. В заключении первого раздела рассмотрена такая замечательная кривая, как верзиера Аньези евклидовой плоскости.

Во втором разделе введено понятие проективного пространства, в котором исследованы кривые второго порядка, а затем введены основные понятия коевклидовой геометрии в её проективной интерпретации.

В третьем разделе введено определение одного из аналогов верзиеры Аньези в геометрии коевклидовой плоскости и получено каноническое уравнение этой кривой. Основные свойства кривой установлены в результате ее исследования по каноническому уравнению. В конце третьего раздела к исследуемой кривой применен алгоритм поточечного построения крунодальных кубик.

Таким образом были решены задачи и достигнута цель выпускной квалификационной работы.