МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Теорема деления и её приложения

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 –Математика и компьютерные науки
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

КОСУМОВОЙ МАРИИ АЛЕКСАНДРОВНЫ
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф-м.н., доцент ________ С.В. ГАЛАЕВ
должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
профессор, д.ф.-м.н., профессор ________ В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | инициалы, фамилия

Саратов 2020

Введение. В выпускной работе излагаются основные понятия геометрии многообразий с линейной связностью. При исследовании дифференциальной геометрии многообразий используются разные методы. К основным методам традиционно относят метод внешних форм и тензорный метод. Мы выбрали тензорный метод. Это означает, что при изложении работы используется исключительно тензорная терминология. На протяжении всей работы сначала тензор, а затем тензорное поле являются основными объектами исследования. Существует два основных способа задания тензора – координатный и инвариантный способы. В первом случае тензор задается как набор компонент, во втором – как полилинейная функция. Каждый из случаев задания тензора имеет свои минусы и плюсы. Главный минус координатного представления тензора заключается в необходимости проверки на инвариантность вводимого объекта. Инвариантность означает следующее – компоненты тензора в разных базисах должны быть связаны между собой с помощью известной формулы. Эта формула называется формулой преобразования компонент тензора. Если тензор вводить как полилинейную функцию, то вопрос корректности отпадает. В то же время, с одной стороны, компоненты тензора часто используются в уравнениях. Например, в уравнениях геодезических. С другой стороны, в дифференциальной геометрии активно используются объекты, которые не являются тензорами, но которые задаются своими компонентами.

Таким образом, весьма актуальной является задача эффективного способа выделения тензора среди других объектов. Такого рода задача может решаться с применением теоремы деления. Необходимость использования теоремы деления в тензорном анализе делает актуальным настоящую выпускную работу. В работе приводится несколько примеров использования теоремы деления в геометрии многообразий со связностью. Один из примеров – обоснование корректности определения тензора кривизны - получен автором работы самостоятельно. Для подробного анализа возможностей применения теоремы деления мы сочли необходимым изложить основы геометрии многообразий со связностью.

Таким образом, целью выпускной работы явилось описание области применения теоремы деления в дифференциальной геометрии многообразий. Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи.

1. Изложены основы тензорной алгебры.

2. Приведены основные понятия теории гладких многообразий.

3. Изучено понятие линейной связности.

4. Введены и изучены основные инварианты линейной связности – тензоры кривизны и кручения.

5. Рассмотрены примеры применения теоремы деления в дифференциальной геометрии многообразий.

Основное содержание работы. *Тензор* - наиболее важный для дальнейшего геометрический объект афинного или геометрического пространства.

В тензорной алгебре над тензорами определяется ряд важнейших алгебраических действий, которые мы рассмотрим для того чтобы разобраться с теоремой деления.

1. Равенство: Два тензора называются равными, если равны функции от одинакового числа переменных. Равенство тензоров определено вне зависимости от координат, значит если в одной системе координат компоненты двух тензоров равны, то они равны и во всех других системах координат. Тоесть два тензора одинакового типа равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты.

2. Сложение и вычитание: Выполнять операцию сложение можно только для однотипных тензоров. Сумма двух скалярных функций T и K от $p + q$ переменных есть скалярная функция $T + K$ от $p + q$ переменных, если эти функции линейны, то их сумма тоже будет являться линейной. После применения операции сложения к тензорам одного и того же типа получается снова тензор того же типа и его называют суммой исходных тензоров.

3. Умножение: Умножение тензора на скаляр - это умножение скаляной функции T от p+q векторных переменных на скаляр λ. Затем, мы получим

новую скалярную функцию $U = \lambda T$ от векторных переменных p+q. Если T-многолинейная функция , то $U = \lambda T$ тоже многолинейная функция, тоесть из тензора T мы получаем новый тензор U: $U(u, v, \omega) = \lambda T(u, v, \omega)$

Операцию умножения можно применять к тензорам произвольного типа. Пусть $T = \left(T^{i_1 \dots i_p}_{j1 \dots jq}\right)$ - тензор типа (p, q) и $S = \left(S^{i_1 \dots i_k}_{j1 \dots jm}\right)$ - тензор типа (k, m). Предположим, что U произведение этих тензоров, тогда запишем выражение $U^{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots ip+k}_{j_1 \dots j_q j_{q+1} \dots jq+m} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} S^{i_{p+1} \dots i_{p+k}}_{j_{q+1} \dots j_{q+m}}$ Тогда выражение $U^{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots ip+k}_{j_1 \dots j_q j_{q+1} \dots jq+m}$ - тензор типа $(p + k, q + m)$ называется произведением тензора T на тензор S.

4. Свёртывание тензора: Свёртывание тензора - это тензорная операция, которая применима только к тензору типа (p, q) при $p \neq 0$, $q \neq 0$, в результате свёртывания из тензора типа (p, q) получается тензор типа $(p-1, q-1)$. Тоесть каждая валентность уменьшается на единицу, а общяя валентность тензора после свёртывания уменьшается на две единицы.

Теперь можем перейти к самой теореме деления.

Теорема деления. *Пусть афинный $n^(p + q)$ - компонентный объект $H^{k_1 \dots k_q}_{i_1 \dots i_p}$ обладает тем свойством, что при любом наборе векторов $v_1, \dots, v_r, r \leq p$ и ковекторов $\omega^1, \dots, \omega^s, s \leq q$ объект*

$$T^{k_{s+1} \dots k_q}_{i_{r+1} \dots i_p} = H^{k_1 \dots k_q}_{i_1 \dots i_p} v_1^{i_1} \dots v_r^{i_r} \omega^1_{k_1} \dots \omega^s_{k_s}$$

является тензором типа $(p - r, q - s)$. Тогда исходный объект H сам является тензором типа (p, q). Доказательство

Выберем произвольным образом векторы $v_{r+1}, \dots, v_p$ и ковекторы $\omega^{s+1}, \dots, \omega_q$ и свернём с ними тензор $T^{k_{s+1} \dots k_q}_{i_{r+1} \dots i_p} = H^{k_1 \dots k_q}_{i_1 \dots i_p} v_1^{i_1} \dots v_r^{i_r} \omega^1_{k_1} \dots \omega^s_{k_s}$. Получим скаляр $\varphi = T^{k_{s+1} \dots k_q}_{i_{r+1} \dots i_p} v_{r+1}^{i_{r+1}} \dots v_p^{i_p} \omega^{s+1}_{k_{s+1}} \dots \omega^q_{k_q}$ - результат полного свёртывания тензоров. Но согласно определению тензора T, скаляр φ можно записать так:

$$\varphi = H_{i_1...i_p}^{k_1...k_q} \upsilon_1^{i_1} ... \upsilon_p^{i_q} \omega_{k_1}^1 ... \omega_{k_q}^q.$$

Последняя формула определяет скалярную функцию от $p+q$ векторных аргументов, по условию теоремы все аргументы совершенно произвольны. Эта функция очевидно линейна относительно каждого векторного переменного, значит мы имеем дело с тензором типа (p, q). Сравнивая с известным определением компонент тензора - формулы $T_{i_1...i_p}^{k_1...k_q} = T(e_{i_1}, ..., e_{i_p}, a^{k_1}, ..., a^{k_q})$ и $T = T(v_1, ..., \omega^q) = T_{i_1...i_p}^{k_1...k_q} \upsilon_1^{i_1} ... \upsilon_p^{i_p} \omega_{k_1}^1 ... \omega_{k_q}^q$ - мы заключаем, что компоненты тензора $\varphi = H_{i_1...i_p}^{k_1...k_q} \upsilon_1^{i_1} ... \upsilon_p^{i_q} \omega_{k_1}^1 ... \omega_{k_q}^q$ как раз и есть числа $H_{i_1...i_p}^{k_1...k_p}$, что и доказывает теорему.

Замечание. Если бы наш исходный объект H не был тензором, то и величина $\varphi = H_{i_1...i_p}^{k_1...k_q} \upsilon_1^{i_1} ... \upsilon_p^{i_q} \omega_{k_1}^1 ... \omega_{k_q}^q$ не была бы скаляром, в разных системах координат эта величина принимала бы разные значения.[5]

Сейчас перейдём к основным умозаключениям работы - это применение теремы деления. Первым рассмотрим **применение теоремы деления для тензоров в евклидовом пространстве**.

Зададим в аффинном пространстве E_n некоторый симметричный двухвалентный ковариантный тензор g_{ij}, удовлетворяющий дополнительному ограничению

$g = \det g_{ij} \neq 0 (5.1)$

Определение 5.1. Величина $g = \det g_{ij} \neq 0$ называется дискриминантам тензора g_{ij}

Предположим, что величина дискриминанта тензора отлична от нуля.Тогда назовём этот тензор g_{ij} фундаментальным или метрическим тензором.

Определение 5.2. Аффинное n-пространотво, в котором задан фундаментальный тензор указанного выше типа, мы будем называть евклидовым n-пространством и обозначать R_n

Задание тензора g_{ij} означает одновременно задание скалярной многолинейной «билинейной» функции от двух векторных аргументов $\phi(u, v)$.

Определение 5.3. Эта многолинейная функция $\phi(u, v)$ сопоставляет каждым двум векторам u, v число $\phi(u, v)$, которое принято называть скалярным произведением данных векторов и обозначать через uv. Тоесть

$uv = g_{ij}u^i v^j.(5.2)$

Невырожденность фундаментального тензора, то есть условие $g = \det g_{ij} \neq 0(5.1)$, влечет ряд важных следствий:

1. Два вектора u и v называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю: $uv = 0(5.6)$.

2. Только нуль-вектор ортогонален всем векторам.

Действительно, если $v^i = 0$, то правая часть $uv = g_{ij}u^i v^j.(5.2)$ равна нулю и для любого вектора и будет $uv = 0$.

Пусть — некоторый постоянный вектор. Рассмотрим скалярную величину $\phi = av$. Ясно, что ϕ является скалярной линейной функцией от векторного аргумента v, то есть ковектором.

Каждому вектору а взаимно однозначно сопоставляется определенный ковектор . При этом, очевидно, $av = \alpha v$ для любого вектора v. В координатах это соотношение переписывается так

$a^i g_{ij} v^j = a_j v^j$, где ^{i} — компоненты вектора , и a_i — компоненты ковектора . Последнее уравнение является тождеством относительно переменных v^j поэтому коэффициенты при v^j в левой и правой частях равны, то есть $a_j = g_{ij} a^i = g_{ji} a^i (5.8)$

Будем теперь рассматривать уравнения $a_j = g_{ij} a^i = g_{ji} a^i$. как линейную систему относительно n искомых величин ^{i}; определитель этой системы относительно n искомых величин a^i, определитель этой системы отличен от нуля, ибо он совпадает ,с дискриминантом $g = \det g_{ij} \neq 0$ система имеет единственное решение, которое находится по известным из алгебры формулам: $a^i = g^{ij} a_j (5.9)$ Здесь коэффициенты g^{ij} являются элементами матрицы, обратной к матрице g_{ij}, это приведенные миноры дискриминанта g коэффициенты g^{ij} связаны с g_{ij} соотношениями $g^{ik} g_{jk} = \delta^i_k (5.10)$

Формулы $a^i = g^{ij} a_j$ дают обратное соответствие, сопоставляя данному ковектору a_i определенный вектор ^{i}. Итак, мы установили взаимно однозначное соответствие между векторами и ковекторами, которое позволяет в евклидовом пространстве отождествлять эти величины, будем в дальнейшем рассматривать в евклидовом пространстве только векторы, а каждый ковектор заменять соответствующим ему вектором и отождествлять с ним. В таком случае следует говорить о двух типах компонент вектора a — контравариантных компонентах ^{i} и ковариантных компонентах a_i одного и того же вектора. Формулы $a_j = g_{ij} a^i = g_{ji} a^i$. и $a^i = g^{ij} a_j$ мы теперь считаем формулами перехода от одного типа компонент вектора к другому их типу. Такие формулы называют формулами переброски индексов, в частности $a_j = g_{ij} a^i = g_{ji} a^i$. осуществляет опускание, а $a^i = g^{ij} a_j$ — поднимание индексов.

Заметим, что коэффициенты g^{ij} образуют n^2-компонентный объект, так как они определены вместе, с компонентами g_{ij} в каждой аффинной карте. При свертывании объекта g^{ij} по одному из индексов с произвольным ковектором a_j мы получим вектор ^{i}, то есть тензор типа $(0,1)$. На основании **теоремы деления** мы заключаем, что объект g^{ij} является тензором типа $(0,2)$. Назовем его контравариантным метрическим (или фундаментальным) тензором.

Таким образом, на основе **теоремы деления**, которая говорт о том, что при любом наборе векторов и ковекторов объект является тензором определённого типа, мы выяснили, что g^{ij} является тензором типа $(0,2)$.

Применение теоремы деления для доказательства тензора абсолютной производной. Чтобы показать использование теоремы деления нужно объяснить понятие афинной связности и дать некоторые определения. Начнем с определения дифференцируемого n-мерного многообразия.

Определение 6.1. Две n-карты χ_1 и χ_2 называются C^v-связанными, если как отображение $\chi_1 \circ \chi_2^{-1}$, так и отображение $\chi_1 \circ \chi_2^{-1}$ принадлежит классу C^v.

Определение 6.2. Дифференцируем n-мерным многообразием X_n называют такое топологическое пространство, которое снабжено совокупностью K $n-$карт.

Заметим, что если мы хотим перенести параллельно какой-либо вектор v' из точки A в точку B, то, естественно, следует указать путь перенесения, то есть кривую, сокдиняющую точки A и B. Итак, пусть кривая $x^i = x^i(t)(6.1)$

соединяет точки A и B и пусть при t_0 мы попадаем в точку A, где задан вектор v_0^i.

Определение 6.3. Говорят, что в многообразии X_n задана связность, если вдоль любой кривой многообразия задано отображение друг на друга касательных E_n в точках этой кривой. В случае, когда такое отображение является центром-аффинным, то есть имеет вид $\upsilon^i(t) = P^i_\kappa(t)\upsilon^\kappa_0$, то связаность называется **аффинной**.

Для тензорного поля $T^i_{j\kappa}(t) = T^i_{j\kappa}(x^1(t), ..., x^n(t))$ вдоль кривой $x^i = x^i(t)$ мы можем вычислить обычным путем абсолютную производную, применяя общую формулу

$$\delta T^{k_1,...,k_q}_{i_1,...,i_p} = dT^{k_1,...,k_q}_{i_1,...,i_p} +$$

$$+\Gamma^{k_1}_{hj} T^{jk_2,...,k_q}_{i_1,...,i_p} dx^h +, ..., +\Gamma^{k_q}_{hj} T^{k_1,...,k_{q-1}j}_{i_1,...,i_p} dx^h -$$

$$-\Gamma^j_{h^{i_1}} T^{k_1,...,k_q}_{ji_2,...,i_p} dx^h -, ..., -\Gamma^j_{hi_p} T^{k_1,...,k_q}_{i_1,...,j} dx^h. \qquad (6.6)$$

Однако, в согласии с $\delta\varphi = \delta H^i_j \upsilon^j \omega_i$, обычная производная по t выражается здесь через частные производные, именно: $\frac{dT^i_{jk}}{dt} = \frac{\partial T^i_{jk}}{\partial x^1} \cdot \frac{dx^1}{dt}(6.7)$

Но в таком случае $\frac{dT^i_{jk}}{dt} = \frac{\partial T^i_{jk}}{\partial x^1} \cdot \frac{dx^1}{dt} + \Gamma^i_{1h} T^h_{jk} \frac{dx^1}{dt} - \Gamma^h_{1j} T^i_{hk} \frac{dx^1}{dt} - \Gamma^h_{1k} T^i_{jh} \frac{dx^1}{dt}(6.8)$

Все слагаемые, стоящие в правой части, имеют множитель $\frac{dx^1}{dt}$, который можно вынести за общую скобку. В скобках получается выражение, которое мы будем обозначать через $\nabla_1 T^i_{jk}$ оно таково: $\nabla_1 T^i_{jk} = \frac{\partial T^i_{jk}}{\partial x^1} + \Gamma^i_{1h} T^h_{jk} - \Gamma^h_{1j} T^i_{hk} - \Gamma^h_{1j} T^i_{jh}(6.9)$

Поэтому соотношение (6.8) переписывается так: $\frac{\delta T^i_{jk}}{dt} = \frac{dx^1}{dt} \nabla_1 T^i_{jk}(6.10)$

Выражение (6.8) совсем не зависит от выбора кривой (6.1), оно полностью определено самим исходным тензорным полем $T^i_{j\kappa} = T^i_{j\kappa}(x^1, ..., x^n)$ в X_n. Рассмотрим ковариантную производную $\nabla_1 T^i_{jk}$ в какой-либо конкретной точке М многообразия. Ясно, что $\nabla_1 T^i_{jk}$ определяет объект в касательном

$E_n(M)$, ибо все компоненты ковариантной производной однозначно определены в каждой карте χ в X_n, а следовательно, и в каждой координатной системе в $E_n(M)$. Проведем через точку М некоторую кривую и найдем абсолютную производную от тензорного поля Т вдоль этой кривой. Мы получим соотношение $\frac{\delta T^i_{jk}}{dt} = \frac{dx^1}{dt}\nabla_1 T^i_{jk}$, которое рассмотрим в точке М. Слева в равенстве $\frac{\delta T^i_{jk}}{dt} = \frac{dx^1}{dt}\nabla_1 T^i_{jk}$ стоит тензор такого же типа, как и исходный тензор, что следует из первого свойства абсолютного дифференцирования. Справа стоит ковариантная производная от Т, свернутая с вектором $\frac{dx^1}{dt} = \upsilon^1$. Однако, так как кривая проведена через точку М совершенно произвольно, то и касательный вектор к ней в точке М будет также произвольным. Следовательно, при свертывании объекта $\nabla_1 T^i_{jk}$ с произвольным вектором υ^1 мы всегда получаем тензор типа (2,1). По **теореме деления** теперь можно заключить, что исходный объект (6.8) сам является тензором и притом типа (3,1).

Применение теоремы деления для доказательства тензора кривизны аффиной связности.

Определение 7.1. Если ввести обозначение $S^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}(7.1)$, то в согласии с равенством $\Gamma^{i'}_{[j'k']} = A^{i'}_i A^i_{[j'} A^k_{k']} \Gamma^i_{jk}$ мы получаем $S^{i'}_{j'\kappa'} = A^{i'}_i A^j_{j'} A^\kappa_{\kappa'} S^i_{j\kappa}(7.2)$, а это-тензорный закон преобразования. Итак, объект S, определенный равенством (7.1), является тензором типа (2,1), этот тензор однозначно определяется объектом аффинной связности Г,, его называют обычно тензором кручения аффинной связности.

Перейдем теперь к тензорам первой валентности. Рассмотрим векторное поле υ^i и для него вычислим вторую ковариантную производную. Сначала выписываем значение первой ковариантной производной от вектора $\nabla_j \upsilon^i = \partial_j \upsilon^i + \Gamma^i_{j1}\upsilon^1(7.3)$

Рассматриваем эту ковариантную производную как новый тензор, имеющий тип (1,1), и применим к нему снова операцию ковариантного дифференцирования. Получим

$$\nabla_\kappa \nabla_j v^i = \partial_\kappa \nabla_j v^i + \Gamma^i_{\kappa h} \nabla_j v^h - \Gamma^h_{\kappa j} \nabla_h v^i =$$

$$\partial_\kappa \partial_j v^i + \partial_\kappa \Gamma^i_{j1} v^1 + \Gamma^i_{j1} \partial_\kappa v^1 + \Gamma^i_{\kappa h} \partial_j v^h +$$

$$\Gamma^i_{\kappa h} \Gamma^h_{i1} v^1 - \Gamma^h_{\kappa j} \nabla_h v^i \tag{7.4}$$

Мы знаем, что $\delta_\kappa \delta_j v^i$−величина, симметричная по индексам k,j. Далее, два подчеркнутых слагаемых в правой части (7.4) в сумме дают выражение, симметричное по индексам k, j, так как они, по существу, получаются друг из друга перестановкой индексов k, j.

При альтернировании по индексам k, j все выражения, симметричные по этим индексам, пропадут, поэтому $\nabla_{[k} \nabla_{j]} v^i = \partial_{[k} \Gamma^i_{j]1} v^1 + \Gamma^i_{[k|h1} \Gamma^h_{j]1} v^1 - \Gamma^h_{[kj]} \nabla_h v^1$(7.5)

Первые два слагаемых в правой части этого равенства содержат один и тот же множитель, именно-вектор v^1, который может быть вынесен за скобку, в последнем слагаемом появился тензор кручения. Введем обозначение $R^i_{kj1} = 2(\partial_{[k} \Gamma^i_{j]1} + \Gamma^i_{[k|h1} \Gamma^h_{j]1})$(7.6)

и после этого перепишем тождество (7.5) в таком виде: $2\nabla_{[k} \nabla_{j]} v^i = R^i_{\kappa j1} v^i - 2S^h_{\kappa j} \nabla_h v^i$(7.7)

Пусть М-некоторая точка многообразия, X_n и χ−любая карта в М. Карте χ сопоставляется определенная аффинная система координат в касательном $E_n(M)$, по формуле (7.6) мы вычислим в точке М набор из n^4 чисел R^i_{kj1}, соответствующих карте χ, а вместе с тем соответствующих и сопоставленной с χ аффинной системе координат в $E_n(M)$. Очевидно, что каждой аффинной системе координат в касательном $E_n(M)$ соответствует вполне определенный набор из n^4 чисел, поэтому R^i_{kj1} определяет объект в касательном $E_n(M)$. Далее, в левой части (7.7) стоит тензор типа (2,1); последнее слагаемое в правой части тоже, очевидно, является тензором такого же типа, поэтому и первое слагаемое справа в равенстве (7.7) будет тензором типа (2,1), как сумма указанных двух тензоров типа (2,1), достаточно перенести последнее слагаемое из правой части равенста (7.7) в левую. Так как исходное векторное поле v^i с самого начала было произвольным, то оно имеет и в точке М совершенно произвольное значение. Таким образом, объект R^i_{kj1} в касательном $E_n(M)$ после свертывания с произвольным вектором v^i дает тензор типа (2,1). Отсюда сейчас же следует по **теореме деления**, что сам объект R^i_{kj1} является тензором типа (3,1). Его называют **тензором кривизны аффинной связности.**

Заключение. "Тензор"– это общее название для векторов, линейных операторов и даже для скаляров. Тензоры широко применяются в дифференциальной геометрии, теории относительности, механике, электродинамике и других областях науки. В последнее время предпринимаются попытки использовать теорию тензоров в экономических науках. В этой курсовой работе мы излагали теорию тензоров с точки зрения прямого тензорного исчисления.

Таким образом было определено что такое тензор и рассмотренны действия над ними. Одним из главных объектов изучения для меня была теорема деления, именно для неё мы рассматривали понятие тензора. И на трёх примерах применения теоремы деления для тензоров в евклидовом пространстве, для доказательства тензора абсолютной производной и для доказательства тензора кривмзны аффиной связности, было доказано,что теорема деления язляется очень важным признаком, который выделяет тензор среди похожих на него объектов.