МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Тернарное отношение «между» и геометрия порядка

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 Группы
направления 02.03.01 –Математика и компьютерные науки
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

МУШКО АНАСТАСИИ ЕВГЕНЬЕВНЫ
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ____________ В.Б. ПОПЛАВСКИЙ
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
профессор, д.ф.-м.н., профессор ____________ В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2020

Введение. В течение последних 2000 лет самыми читаемыми книгами на Земле бесспорно были Библия и Начала Евклида. Евклид не останавливался подробно на используемых им первоначальных понятиях и отношениях, довольствуясь тем, что определил их в терминах, которые должны быть понятными каждому. Его пять постулатов таковы:

1. Из всякой точки к другой точке можно было провести прямую линию.
2. Конечную прямую линию можно продолжить непрерывно по прямой линии.
3. Из всякого центра и всяким радиусом можно описать окружность.
4. Всякие прямые углы равны между собой.
5. Если прямая линия встречает две другие прямые линии таким образом, что с одной стороны они образуют два внутренних односторонних угла, в сумме меньших двух прямых углов, то эти прямые линии, если продолжить их неопределенно, пересекутся с той стороны, с которой односторонние углы составляют меньше двух прямых углов.

Пятый постулат эквивалентен аксиоме параллельности Евклида: через точку, не лежащую на данной прямой линии, проходит в точности одна прямая линия, параллельная данной. Евклид черпал материал для своих книг из разных источников, поэтому не удивительно, что мы можем извлечь из его «Начал» две самостоятельные геометрии, различающиеся как своей логической основой, так и своими первоначальными. Они известны как абсолютная и аффинная геометрии.

Абсолютная геометрия, которую впервые выделил Больяи (венг. Bolyai),— это часть евклидовой геометрии, которая опирается на четыре постулата и не зависит от пятого. Афинная геометрия — это геометрия, не опирающаяся на единственность прямой линии, параллельной данной прямой линии и проходящей через данную точку. С другой стороны, в аффинной геометрии, которую выделил Эйлер, эта единственность параллельной играет ведущую роль. Третий и четвертый постулаты Евклида теряют в ней смысл, так как окружности в этой геометрии не рассматриваются, а углы не измеряются. Поэтому единственными допустимыми являются параллельный перенос и центральная симметрия.

Аффинные предложения Евклида — это те предположения, которые сохраняют силу при параллельном проектировании с одной плоскости на другую.

Так как каждое предложение Евклида принадлежит либо аффинной геометрии, либо абсолютной, либо не принадлежит ни той, ни другой, то с первого взгляда может показаться, что эти две геометрии не имеют ничего общего, за исключением первого и второго постулатов. Однако существует группа весьма важных предложений, принадлежащих обеим геометриям.

Основной идеей в этих предложениях является идея о расположении «между» (или «промежуточности»), которую Евклид использовал в своем знаменитом определении «концы-линии-точки», где линия, под которой имеется в виду прямолинейный отрезок, определяется как то, что находится между ее концами. Это наводит на мысль о возможности принять понятие «быть между» за первоначальное.

Дипломной работа - это изучение истории возникновения и развития геометрии порядка, нахождение различных подходов в построении геометрии порядка и их анализ.

Целью данной работы является рассмотрение геометрии, которая составляет общий фундамент аффинной и абсолютной геометрий.

Задачи:

- Рассмотреть основные сведения о геометрии порядка
- Рассмотреть аксиоматический подход и требования к системе аксиом
- Определить основные аксиомы для дальнейшего построения объектов геометрии порядка
- Вывести определения интервала, прямой, луча, полуплоскости, фундаментальных множеств
- Доказать теоремы, относящиеся к построению геометрии порядка

Актуальность и научная значимость работы заключается в том, что, во-первых, геометрия является первичным видом интеллектуальной деятельности и составляющей общечеловеческой культуры, поскольку некоторые аксиомы и теоремы геометрии являются одними из древнейших памятников культуры. Основой геометрии является принцип доказательности утверждений.

Основное содержание работы. Всякая аксиоматическая теория строится по следующей схеме:

1. Перечисляются основные понятия: основные объекты и основные отношения - отправные понятия, принимаемые без определения.
2. Затем перечисляются аксиомы - исходные предложения теории, принимаемые без доказательства, в которых выражены некоторые простейшие свойства основных понятий.
3. Все другие понятия теории определяются через основные и ранее введенные понятия.
4. Все другие утверждения теории доказываются с помощью аксиом и ранее доказанных утверждений.

Определение 2.1. Рассмотрим некоторое множество, элементы которого мы назовем точками, и некоторое семейство подмножеств множества точек, элементы которого мы назовем прямыми.

Справедливы следующие аксиомы.

Аксиома 2.1. Если a и b две различные точки, то существует одна и только одна прямая $\mathbf{l}(a,b)$, определяемая этими точками, такая что $\{a,b\} \subset \mathbf{l}(a,b)$.

Аксиома 2.2. Каждая прямая содержит по крайней мере две точки. Если p точка и L прямая, то говорят, что p лежит на L , если $p \in L$.

Теорема 2.1. Если L и M две прямые и L пересекает M , то либо $L = M$, либо $L \bigcap M$ содержит ровно одну точку.

Определение 2.2. Если L и M две прямые и L не пересекает M , то L и M называются параллельными.

Определение 2.3. Множество точек S называется множеством коллинеарных точек, если все его точки лежат на одной прямой. Если S не является множеством коллинеарных точек, тогда будем называть S множеством неколлинеарных точек.

Аксиома 2.3. Существует множество неколлинеарных точек. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. Какова бы ни была прямая L , существует точка p , не принадлежащая этой прямой.

Определение 3.1. Для любых двух различных точек a и b существует множество $\mathbf{s}(a,b)$ называемое интервалом, соединяющим точку a с точкой b, и удовлетворяющее следующим аксиомам (аксиомам 3.1-3.3):

Аксиома 3.1. Если a и b две различные точки, то

а) $\mathbf{s}(a,b) \subset \mathbf{l}(a,b)$

б) $\mathbf{s}(a,b) = \mathbf{s}(b,a)$

в) $\mathbf{s}(a,b) \cap \{a,b\} = \varnothing$

Аксиома 3.2.

а) Если a и b две различные точки, то $\mathbf{s}(a,b)$ непустое множество.

б) Если a, b и c три различные неколлинеарные точки, то выполняется ровно один из следующих случаев:

$$a \in \mathbf{s}(a,c), b \in \mathbf{s}(c,a), c \in \mathbf{s}(a,b).$$

в) Если a и b две различные точки, то существует точка c , отличная от точек a и b , такая что $b \in \mathbf{s}(a,c)$.

Определение 3.2. Если L прямая a и b две различные точки, не лежащие на L , то говорят, что точки a и b лежат по одну сторону от прямой L , если $\mathbf{s}(a,b)$ не пересекает L , и a и b лежат по разные стороны от L в противном случае.

Аксиома 3.3. Пусть L прямая и a, b и c три различные точки, не лежащие на L . Тогда

а) Если a и b лежат по одну строну от L и b и c лежат по одну сторону от L , то a и c лежат по одну сторону от L.

б) Если a и b лежат по одну по разные стороны от L и b и c лежат по разные стороны от L , то a и c лежат по одну сторону от L .

Определение 3.3. Если S интервал, то точка a называется концевой точкой интервала S , если существует точка b, отличная от точки a, такая что $S = \mathbf{s}(a,b)$.

Теорема 3.1. Пусть прямая, L и o, a, b и c различные точки, лежащие на L . Тогда

а) Если $o \notin \mathbf{s}(a,b)$ и $o \notin \mathbf{s}(b,c)$,то $o \notin \mathbf{s}(a,c)$

б) Если $o \in \mathbf{s}(a,b)$ и $o \in \mathbf{s}(b,c)$,то $o \in \mathbf{s}(a,c)$

Теорема 3.2. (О разбиении) Пусть a и c две различные точки и точка b лежит между точками a и c.Тогда $b \notin \{a, c\}$ и $\{\mathbf{s}(a, b), \{b\}, \mathbf{s}(b, c)\}$разбиение $\mathbf{s}(a, c)$.

Определение 3.4. Пусть X некоторое множество точек. Границей $\mathbf{b}(X)$ множества X называется множество точек $b \notin X$, для которых существует точка $a \in X$ и $\mathbf{s}(a, b) \subset X$.

Определение 3.5. Множество C называется выпуклым, если для любых точек a и b из C интервал $\mathbf{s}(a, b) \subset C$.

Теорема 3.3. Пусть $(C_i)_{i \in I}$ непустое семейство выпуклых множеств. Тогда $\bigcap_{i \in I} C_i$ выпукло.

Определение 4.1. Пусть o и a две различные точки. Множество

$$\mathbf{r}(o, a) = \{a\} \bigcup \{b \in \mathbf{l}(o, a) \sqcup \{a\} : o \notin \mathbf{s}(a, b)\} \setminus \{o\}$$

называется лучом, исходящим из точки o в сторону точки a .

Определение 4.2. Пусть a и b две точки. Введем в рассмотрение следующее множество

$$(a, b) = \{\{a\}\} \bigcup \{\{a, b\}\}$$

Говорят, что p упорядоченная пара, если существуют точки a, b , такие что $p = (a, b)$. Точка a называется первой координатой упорядоченной пары p , точка b называется второй координатой упорядоченной пары p .

Теорема 4.1. Пусть дана некоторая точка o и $\mathbf{R} = \{\mathbf{r}(o, a) : o \neq a\}$ - множество всех лучей с началом в точке o. Тогда $\mathbf{R}(o)$ разбивается точками отличными от o на непересекающиеся классы.

Теорема 4.2. Если o и a две точки и L прямая, то луч $\mathbf{r}(o, a) \subset L$ тогда и только тогда, когда $L = \mathbf{l}(o, a)$.

Теорема 4.3. Пусть o и a две различные точки. Тогда граница луча $\mathbf{b}(\mathbf{r}(o, a)) = \{o\}$.

Определение 4.3. Пусть R луч. С учетом двух предыдущих теорем, мы можем определить $\mathbf{l}(R)$ как прямую, содержащую R , и мы можем определить $\mathbf{o}(R)$ как единственный элемент в границе луча $\mathbf{b}(R)$. Назовем $\mathbf{o}(R)$ началом луча R.

Определение 4.4. Пусть R луч. Введем в рассмотрение следующее множество:

$$R^0 = \mathbf{l}(R) \sqcup (R \bigcup \{\mathbf{o}(R)\}).$$

Теорема 4.4. Пусть R луч. Тогда R^0 луч, $\mathbf{o}(R) = \mathbf{o}(R^0)$ и $\mathbf{l}(R) = \mathbf{l}(R^0)$.

Теорема 4.5. Пусть L прямая,$S \subset L$, $<$ и $\prec$ два геометрических порядка на S , тогда $<$ и $\prec$ совпадают.

Теорема 4.6. Пусть L прямая. Тогда существует геометрический порядок на L .

Теорема 4.7. Пусть L прямая и $<$ геометрический порядок на L , $o \in L$, $R \subset L$. Тогда R луч с началом в точке o тогда и только тогда, когда либо $R = \{x \in L : o < x\}$, либо $R = \{x \in L : x < o\}$.

Определение 4.11. Пусть L прямая, $<$ геометрический порядок на L, R луч с началом в точке o и $R \subset L$. Будем говорить, что $<$ - геометрический порядок на прямой L , индуцированный лучом R, если $R = \{x \in L : o < x\}$.

Теорема 4.8. Пусть L прямая, R луч с началом в точке o ,$R \subset L$, $<$ - геометрический порядок на L, индуцированный лучом R , $p \in R$. Тогда

$$\{\{x \in L : o < x < p\}, \{p\}, \{x \in L : p < x\}\}$$

разбиение R.

Теорема 4.9. Пусть L прямая, R луч с началом в точке o , R' луч с началом в точке o', $R \subset L, R' \subset L$ и $R \neq R'$. Тогда выполняется ровно один из следующих случаев:

а) $R \subset R'$

б) $R' \subset R$

в) $R \bigcap R' = \varnothing$

г) $R \bigcap R'$ интервал.

Определение 5.1. Пусть L прямая. Тогда для каждой точки a , не принадлежащей прямой L , введем в рассмотрение множество $\mathbf{h}(L, a)$, состоящее из таких точек b , что интервал $\mathbf{s}(a, b)$ не пересекает L. Таким образом, $\mathbf{h}(L, a)$ представляет собой множество, состоящее из всех точек, лежащих по одну сторону с точкой a относительно прямой L , включая саму точку a.

Теорема 5.1. Пусть L прямая. Тогда $\mathbf{H}(L)$ есть объединение двух множеств, состоящих из точек, не лежащих на L .

Теорема 5.2. Пусть L прямая и a и b две различные точки, причем $a \notin L$ и $\mathbf{s}(a, b)$ не пересекает L . Тогда

$$\mathbf{s}(a, b) \subset \mathbf{H}(L, a).$$

Теорема 5.3. Пусть H полуплоскость. Тогда граница $\mathbf{b}(H)$ прямая и

$$H \in \mathbf{H}(\mathbf{b}(H)).$$

Определение 5.2. Пусть H полуплоскость. Опираясь на предыдущие утверждения, определим полуплоскость H^0 таким образом, что $\mathbf{H}(\mathbf{b}(H)) = \left\{H, H^0\right\}$. Полуплоскость H^0 называется полуплоскостью, противоположной полуплоскости H .

Очевидно, что $H^{00} = H$.

Теорема 5.4. Если L прямая, $H \in \mathbf{H}(L)$, $o \in L$ и R луч с началом в o , то либо $R \subset L$, либо $R \subset H$, либо $R \subset H^0$.

Определение 5.3. Пусть L прямая, o точка, не лежащая на L , R луч с вершиной в точке o и $L \bigcap R = \oslash$. Тогда множество $\mathbf{h}(L, R)$, где $R \subset H$, $H \subset \mathbf{H}(L)$, называется полуплоскость, определяемой лучом R .

Теорема 5.5. Пусть H полуплоскость, C выпуклое множество и $C \bigcap \mathbf{b}(H) = \oslash$. Тогда либо $C \subset H$, либо $C \subset H^0$

Теорема 5.6. Прямые, интервалы и полуплоскости выпуклы.

Теорема 5.7. Если L прямая и H полуплоскость, тогда выполняется ровно один из следующих случаев:

а) $L \subset H$

б) $L \subset H^0$

в) $L = \mathbf{b}(H)$

г) существует точка o , такая что $L \bigcap \mathbf{b}(H) = \{o\}$ и $L \bigcap H$ луч с началом в точке o .

Определение 6.1. Множество F называется фундаментальным, если F не пусто и $F = \bigcap \tilde{f}$, где $\tilde{f}$ если непустое конечное семейство полуплоскостей.

Теорема 6.1. Если F фундаментальное множество, точка $a \in b(F)$ и точка $b \in F$, то интервал $\mathbf{s}(a, b) \in F$.

Определение 6.2. Семейство полуплоскостей ε называется эффективным, если оно непустое и конечное, $\bigcap \varepsilon \neq \varnothing$ и $\bigcap \tilde{f} \neq \bigcap \varepsilon$, если $\tilde{f}$ непустое собственное подсемейство ε.

Теорема 6.2. Если $\tilde{f}$ непустое семейство полуплоскостей и $\bigcap \tilde{f} \neq \varnothing$, то существует его эффективное подсемейство ε, такое что $\bigcap \tilde{f} = \bigcap \varepsilon$.

Теорема 6.3. Пусть H и I две различные полуплоскости, тогда выполняется ровно один из следующих случаев:

а) $\mathbf{b}(H)$ пересекает $\mathbf{b}(I)$ в некоторой точке и $\{H, I\}$ эффективно.

б) $\mathbf{b}(H) = \mathbf{b}(I)$, $I = H^0$, $H \bigcap I = \varnothing$ и $\{H, I\}$ не эффективно.

в) $\mathbf{b}(I) \subset H$, $\mathbf{b}(H) \subset I$ и $\{H, I\}$ эффективно.

г) $\mathbf{b}(I) \subset H$, $\mathbf{b}(H) \subset I^0$, $H \subset I$ и $\{H, I\}$ эффективно.

д) $\mathbf{b}(I) \subset H^0$, $\mathbf{b}(H) \subset I$, $I \subset H$ и $\{H, I\}$ не эффективно.

е) $\mathbf{b}(I) \subset H^0$, $\mathbf{b}(H) \subset I^0$, $H \bigcap I = \varnothing$ и $\{H, I\}$ не эффективно.

Теорема 6.4. (О пересечении полуплоскостей) Пусть o точка и H и I две полуплоскости, такие что $\mathbf{b}(H) \bigcap \mathbf{b}(I) = \{o\}$. Пусть $a \in \mathbf{b}(H) \bigcap I$ и $b \in \mathbf{b}(I) \bigcap H$. Тогда

$$H \bigcap I = \bigcap \{\mathbf{r}(o, e) : e \in \mathbf{s}(a, b)\}. \tag{6.1}$$

Теорема 6.5. Пусть H, I и J различные полуплоскости, границы которых $\mathbf{b}(H), \mathbf{b}(I)$и $\mathbf{b}(J)$ пересекаются в точке o. Тогда множество $\{H, I, J\}$ не эффективно.

Определение 6.3. Пусть $\tilde{f}$ непустое семейство полуплоскостей. Тогда для каждого $H \subset \tilde{f}$ введем в рассмотрение множество $\mathbf{s}(\tilde{f}, H)$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) $\mathbf{s}(\tilde{f}, H) = \mathbf{b}(H)$, если $\tilde{f} = \{H\}$

б) $\mathbf{s}(\tilde{f}, H) = \bigcap \left\{ \mathbf{b}(H) \bigcap G : G \in \tilde{f} \setminus \{H\} \right\}$, если $\tilde{f} \neq \{H\}$.

Теорема 6.6. Пусть $\tilde{f}$ непустое семейство полуплоскостей, F непустое множество и $F = \bigcap \tilde{f}$. Если $H \in \tilde{f}$ и $S = \mathbf{s}(\tilde{f}, H)$, то S либо пусто, либо является интервалом, лучом или прямой. Если S пусто, то $F = \bigcup (\tilde{f} \setminus \{H\})$.

В противном случае

$$\left\{\mathbf{s}(\tilde{f},H) : H \in \tilde{f}\right\} \bigcup \left\{\bigcup \left\{\mathbf{b}(\mathbf{s}(\tilde{f},H)) : H \in \varepsilon\right\}\right\}$$

разбиение $\mathbf{b}(\bigcap \tilde{f})$, где ε эффективное семейство полуплоскостей для $\tilde{f}$.

Определение 6.4. Пусть F фундаментальное множество, ε эффективное семейство полуплоскостей, такое что $F = \bigcap \varepsilon$. Тогда элементы семейства ε называются ограничивающими полуплоскостями для F, а элементы множества $\{\mathbf{s}(\varepsilon, H) : H \in \varepsilon\}$ называются сторонами множества F. Вершиной множества F называется конечная точка интервала, являющегося стороной множества F, и начало луча, также являющегося стороной множества F. Заметим, что

$$\{(S,H) : S \text{ сторона множества } F, H \in \varepsilon \text{ и } S \subset \mathbf{b}(H)\}$$

функция, отображающая множество сторон на множество огранивающих полуплоскостей. Тогда о стороне S можно говорить как о стороне, соответствующей ограничивающей полуплоскости H, а о полуплоскости H как об ограничивающей полуплоскости, соответствующей стороне S.

Теорема 6.7. Пусть F фундаментальное множество, o — вершина F и $\tilde{H} = \{H : H$ — ограничивающая полуплоскость F и $o \in \mathbf{b}(H)$.

Если S сторона F, соответствующая элементу из $\tilde{H}$, то либо S интервал и o конечная точка S , либо S луч с началом в точке o.

Определение 6.5. Пусть F фундаментальное множество и o вершина F . Сторона S множества F называется присоединенной к вершине o , если $o \in \mathbf{b}(S)$. В противном случае сторона S называется неприсоединенной к вершине o. Вершина p множества F, отличная от o, называется присоединенной к вершине o, если интервал $\mathbf{s}(o,p)$ является стороной F. В противном случае вершина p называется неприсоединнной к вершине o.

Теорема 6.8. Если F фундаментальное множество, точки $a, b \in \mathbf{b}(F)$ и $a \neq b$, то интервал $\mathbf{s}(a,b) \subset F$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{s}(a,b)$ не содержится ни в одной из сторон F.

Заключение. В ходе изучения геометрии порядка в данной дипломной работе выполнены все задачи:

- Рассмотрены основные сведения о геометрии порядка, история возникновения, развитие геометрии порядка, дополнение разными математиками.
- Рассмотрена схема аксиоматической теории, математическая структура аксиоматической теории, приведены требования к системе аксиом.
- Определены основные аксиомы для построения объектов геометрии порядка, приведены необходимые рисунки, определения и теоремы для дальнейшего построения и рассмотрения объектов геометрии порядка.
- Даны определения интервала, прямой, луча, полуплоскости, фундаментальных множеств и необходимые понятия, связанные с построением этих объектов.
- Доказаны теоремы, относящиеся к построению геометрии порядка