МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Теоремы об отделимости выпуклых множеств в линейном пространстве

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 –Математика и компьютерные науки
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

САМАРИНА НИКОЛАЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ____________ В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
профессор, д.ф.-м.н., профессор ____________ В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2020

Введение.Геометрические основы выпуклого анализа начал рассматривать в своих работах Г.Минковский ещё в начале прошлого века, но основное его развитие началось в 60-е годы. Одной из причин, стимулирующих интерес к выпуклому анализу, явилось нахождение весьма существенных его приложений в математической экономике, теории оптимизации и теории игр. Не случайно в большинстве современных монографий, посвященных математической экономике или теории оптимизации, значительное место отводится изложение основ выпуклого анализа.

В наибольшей общности изложение выпуклого анализа естественно проводить в рамках теории топологических векторных пространств.

Основная цель моей работы изучить теоремы об отделимости выпуклых множеств в линейном пространстве. Основными задачами данной выпускной квалификационной работы являются следующие:

1.Изучить основные алгебраические свойства выпуклых множеств произвольных и конечномерных линейных пространствах;

2.Рассмотреть способы задания топологии в линейных пространствах: с помощью нормы, с помощью скалярного произведения и в конечномерных линейных пространствах;

3. Разобрать доказательства теорем о топологических свойствах выпуклых множеств;

4. Привести полные доказательства теорем об отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями в конечномерных линейных пространствах;

5. Составить программу для задачи о принадлежности точки к выпуклой оболочке заданного конечного множества.

Основное содержание работы содержит 5 разделов:

1. Введение.

2. Структура выпуклых множеств.

3. Топологическая структура выпуклых множеств на линейном . пространстве

4. Отделимость выпуклых множеств.

5. Заключение.

Во **введении** формулируется цель работы и задачи для достижения цели.

В **первой главе** изучаются выпуклые множества в линейном пространстве. Здесь рассматриваются такие понятия, как выпуклая оболочка, размерность выпуклого множества, симплексы. Доказывается теорема Каратеодори о структуре линейной оболочки множества в конечномерном линейном пространстве.

Необходимо дать определение ряду понятий.

Если на непустом множестве V задана линейная (векторная) структура над некоторым полем, то говорят, что V образует*линейное* или *векторное пространство.*

Подмножество $C \in V$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и соединяющий их отрезок, то есть если условия

$$a, b \in C, 0 \leq \alpha \leq 1, \text{влекут } ((1-\alpha) * a + \gamma * b)$$

.

Система точек $(x_0, x_1, ..., x_m)$ в линейном пространстве называется *аффинно независимой*, если ни одна из них не является аффинной комбинацией остальных точек этой системы. В противном случае система точек называется *аффинно зависимой.*

Пусть $x_0, x_1, ..., x_m$ - аффинно независимая система $m + 1$ точек в линейном пространстве V. Выпуклая оболочка $conv(x_0, x_1, ..., x_m)$ называется m-мерным *симплексом*, а точки $x_0, x_1, ..., x_m$-его *вершинами.*

Необходимо изучить ряд теорем и лемм о структуре выпуклых множеств.

Теорема 1.1 Выпуклая оболочка множества $X \subseteq V$ совпадает с множеством всевозможных выпуклых комбинаций элементов их X, взятых в любом конечном числе. Запись:

$$convX = \{\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k : k = 1, 2, ...; a_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1\}$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы основывается на следующих леммах.

Лемма 1.1 Для того чтобы подмножество линейного пространства было выпуклым, необходимо и достаточно чтобы оно содержит выпуклые линейные комбинации любого конечного числа своих точек.

Лемма 1.2 Множество выпуклых комбинаций элементов всякого множества X является выпуклым множеством, содержащим X.

Далее рассматривается теорема Каратеодори.

Теорема Каратеодори. Пусть X-подмножество линейного пространства V, причём $\dim(affX) = m$-максимальное число аффинно независимых точек минус 1 . Тогда $convX$ совпадает с множеством всевозможных выпуклых комбинаций семейств, содержащих не более, чем $m+1$ точек, взятых из X.

Доказательство этой теоремы основано на том, что выпуклая комбинация любого конечного семейства точек из X содержится в $convX$. Обратно, пусть $x \in convX$. Точка x представима в виде выпуклой комбинации некоторого конечного семейства точек из X; точка x представима в виде выпуклой комбинации аффинно независимого подсемейства точек из X. Но из условия $\dim(affX) = m$ следует, что аффинно независимое подсемейство точек из X содержит не более, чем $m + 1$ точек.

Следствие. Пусть V - n-мерное линейное пространство, $X \subseteq V$. Если $x \in convX$, то что точка x представима в виде выпуклой комбинации на более, чем $n + 1$ точек их X (а значит - за счёт добавления необходимого числа точек с нулевыми коэффициентами - и в виде выпуклой комбинации ровно $n + 1$ точек).

Лемма 1.3 Если точка x-представлена в виде выпуклой комбинации некоторого семейства точек, то она может быть представлена в виде выпуклой комбинации аффинно независимого подсемейства этого семейства.

Далее вводится определение размерности выпуклого множества.

Размерность выпуклого множества C есть размерность аффинного подпространства, которое является аффинной оболочкой множества C, то есть $\dim C = \dim(affC)$.

Примеры. В любом линейном пространстве точка имеет размерность равную 0. Отрезок, луч и прямая имеет размерность, равную 1. В трёхмерном евклидовом пространстве треугольник, круг, квадрат имеет размерность, равную 2. Пирамида, шар, куб имеет размерность равную 3.

Доказывается ряд утверждений о размерности выпуклых множеств.

Предложение 1.3. Размерность m-мерного симплекса равна m.

Предложение 1.4. Размерность выпуклого множества совпадает с максимальной размерностью содержащихся в нем симплексов.

Предложение 1.5. Выпуклое множество имеет полную размерность тогда и только тогда, когда его аффинная оболочка совпадает со всем пространством V.

Во **второй главе** изложены вопросы, посвященные способам ведения топологии на линейном пространстве. Также изучаются топологические свойства выпуклых оболочек, эквивалентность метрик и топологий.

Линейное пространство V, на котором задана топология, согласованная с имеющейся на V линейной структурой в том смысле, что операции $+$ и $*$ непрерывны в этой топологии; называется *топологическим линейным (векторным) пространством*, его свойства-это инъективность, сюръективность, непрерывность.

Доказывается следующая теорема о замыкании и внутренности выпуклых множеств.

Теорема 2.1. В нормированном линейном пространстве: а)замыкание выпуклого множества выпукло, б)внутренность выпуклого множества выпукла.

Определение 2.3.Линейное пространство, в котором задана норма, называется *нормированным* линейным пространством.

В нормированном линейном пространстве функция $\rho(x, y) = \|y - x\|$ является метрикой, то есть для ρ выполнены аксиомы метрики:

1. $\rho(x, x) = 0$; если $\rho(x, y) > 0$ (положительность),

2. $\rho(y, x) = \rho(x, y)$ (симметричность),

3.$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольников).

Метрика, построенная указанным выше способом с помощью нормы, называется метрикой, *ассоциированной* с этой нормой. Легко проверить, что метрика, ассоциированная с нормой, обладает следующими свойствами:

$$(\alpha) \qquad \rho(x + a, y + a) = \rho(x, y),$$

$$(\beta) \qquad \rho(\gamma x, \gamma y) = |\gamma| \rho(x, y).$$

Свойство (α) выражает инвариантность метрики относительно сдвигов; свойство (β) выражает тот факт, что при преобразовании гомотетии с коэффициентом гомотетии γ расстояние между точками увеличивается в $|\gamma|$ раз.

Обратно, пусть $\rho(x, y)$-некоторая метрика на линейном пространстве V, удовлетворяющая дополнительно условиям (α) и (β). Тогда функция

$$\|x\| \stackrel{df}{=} \rho(x, 0)$$

есть норма на V, причём ассоциированная с ней метрика есть первоначальная метрика ρ. Итак,*задание нормы в линейном пространстве эквивалентно заданию в нем метрики, удовлетворяющей дополнительным условиям*(α) *и* (β). Пусть V-нормированное линейное пространство. Множество $B = \{x \in V : \|x\| \leqslant 1\}$ называется *единичным замкнутым шаром* с центром в точке O (коротко-*единичным шаром*). *Единичная сфера* с центром в точке O есть $S = \{x \in V :\in V : \|x\| = 1\}$. Замкнутый шар с центром в точке a и радиусом $r > 0$ определяется как $B_{[a,r]} = \{x \in V : \|x - a \leqslant r\}$. Открытый шар с центром в точке a радиуса r есть $B_{(a,r)} = \{x \in V : \|x - a < r\}$. Так как конечномерное линейное пространство, имеющее размерность n, изоморфно арифметическому пространству R^n, то в нем всегда можно задать норму (и, как известно, все его нормы эквивалентны между собой). Отсюда следует, что в конечномерном ЛП все нормированные топологии совпадают. Эта единственная топология называется *стандартной.*

А именно подмножество X считается открытым в топологии метрического пространства, если любая его точка является центром некоторого шара, целиком содержащегося в X; другими словами, открытые шары образуют базу топологии метрического пространства.

Дано полное доказательство теоремы о компактности выпуклой оболчки:

Теорема 2.2. В конечномерном линейном пространстве выпуклая оболочка компактного множество компактна.

Для доказательства теоремы используется *Критерий компактности в метрических пространствах.* Множество X в метрическом пространстве является компактным тогда и только тогда, когда любая последовательность точек в X содержит последовательность, сходящуюся к некоторой точке из X.

Основное содержание выпускной квалификационной рыботы содержится в главе 3, где доказывается ряд теорем об отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями. В **третьей главе** изучены отделимости выпуклых множеств в линейных пространствах: собственная, сильная, опорная - отделимости.

Пусть C_1 и C_2-два выпуклых множества в линейном пространстве V. Говорят, что гиперплоскость H *отделяет* C_1 от C_2, если C_1 и C_2 содержатся в разных полупространствах, определяемых гиперплоскостью $H : C_1 \subseteq H_+$ и $C_2 \subseteq H_-$. Гиперплоскость H называется при этом *отделяющей.*

Имеется несколько способов усиления понятия отделимости.

А)*Собственная отделимость.* Дополнительное требование к отделимости состоит в том, что выпуклые множества C_1 и C_2 не должны лежать оба в отделяющей гиперплоскости H (допускается вариант, когда одно из множеств C_1 или C_2 лежат в H).

В конечномерном линейном пространстве V любые два выпуклых множества C_1 и C_2, для которых $dim(C_1 \cup C_2) < dimV$, могут быть отделены гиперплоскостью. Действительно, любая гиперплоскость H, содержащая $aff(C_1 \cup C_2)$, является в этом случае отделяющей, так как $C_1 \subseteq H \subseteq H_+, C_2 \subseteq H \subseteq H_-$. Такое отделение выпуклых множеств не является собственным и не представляет интереса.

Б) *Строгая отделимость.* Требуется, чтобы выпуклые множества C_1 и C_2 лежали в разных открытых полупространствах, определяемых гиперплоскостью $C_1 \subseteq H \subseteq H_+^0, C_2 \subseteq H \subseteq H_-^0$ (открытые полупространства получаются из замкнутых полупространств "Выбрасыванием"из них точек граничной гиперплоскости: $H_+^0 = H_+ \backslash H, H_-^0 = H_- \backslash H$).

На евклидовой плоскости два касающихся круга могут быть отделены гиперплоскостью (в качестве которой выступает общая касательная к граничным окружностям), но не могут быть отделены строго.

В) *Сильная отделимость* означает с интуитивной точки зрения, что отделяемые множества могут быть "увеличены на ϵ"и при этом оставаться в разных открытых полупространствах. Формально это означает следующее:

гиперплоскость H сильно отделяет выпуклые множества C_1 и C_2, если существует такое $\epsilon > 0$, что выпуклые множества $C_1+\epsilon*B$ и $C_2+\epsilon*B$ содержатся в разных открытых полупространствах, определяемых гиперплоскостью H (через B, как и ранее, обозначается единичный шар с центром в O).

На координатной плоскости XOY выпуклые множества C_1 и C_2, ограниченные ветвями гипербол, отделяются строго осью x-ов, однако C_1 и C_2 не могут быть сильно отделены друг от друга никакой гиперплоскостью.

Таким образом, в приведённом перечне каждый следующий вариант отделимости является усилением предыдущего. Наибольшее значение в приложениях имеют собственная и сильная отделимость выпуклых множеств.

Рассмотрим ещё одну особенность отделимости выпуклых множеств.

Г)*Отделимость в аффинном пространстве.* Пусть A-аффинное подпространство конечномерного линейного пространства, C_1,C_2 $\in$ A и H-гиперплоскость в A. Будем говорить, что H отделяет C_1 от C_2 в аффинном пространстве A, если $C_1 \in H_+$, $C_1 \in H_-$ (H_+ и H_- понимаются в этом случае как полупространства в аффинном пространстве A).

Теперь перейдём непосредственно к теоремам об отделимости выпуклых множеств на линейном пространстве.

Теорема 3.1. (Первая теорема об отделимости). Для того, чтобы выпуклые множества C_1 и C_2, лежащие в конечномерном линейном пространстве V, были собственно отделимыми некоторой гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы их относительные внутренности не пересекались, то есть чтобы $riC_1 \cap riC_2 = \oslash$.

Теорема 3.2. (вторая теорема об отделимости). Пусть C_1, C_2-непустые выпуклые множества в конечномерном евклидовом пространстве V. Для того, чтобы множества C_1 и C_2 могли быть сильно отделены некоторой гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы расстояние между ними было строго положительно.

Лемма 3.4. Выпуклые множества C_1 и C_2 сильно отделимы тогда и только тогда, когда $O \notin cl(C_2 - C_1)$.

Лемма 3.4 фактически дает топологический критерий отделимости выпуклых множеств в конечномерном линейном пространстве, снабженном стандартной топологией.

Наиболее важный случай, когда реализуется условие теоремы 3.2, указан в следующей теореме.

Теорема 3.3. Пусть C_1 и C_2-непустые выпуклые множества конечномерного линейного пространства, причём одно из них замкнуто, а другое компактно и $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Тогда C_1 и C_2 сильно отделимы.

Доказательство этой теоремы основано на следующем факте.

Лемма 3.5. В конечномерном линейном пространстве сумма замкнутого и компактного множества замкнута.

В работе указаны условия, при которых гиперплоскость является опорной к выпуклому множеству. Укажем вначале простое необходимое условие для опорной гиперплоскости.

Лемма 3.7. Если гиперплоскость H содержит внутреннюю точку множества C, то в C найдутся точки, лежащие в разных открытых полупространствах, определяемых гиперплоскостью H. Следовательно, гиперплоскость. содержащая внутреннюю точку выпуклого множества C, не может быть опорной к C.

Лемма 3.8. Если выпуклое множество C содержится в одном из замкнутых полупространств, ограниченных гиперплоскостью H, проходящей через граничную точку множества C, то гиперплоскость H-опорная к C.

Определение. 3.3 *Граничная точка множества* - точка, в любой окрестности которой находятся как точки, принадлежащие данному множеству, так и не принадлежащие ему.

В работе указан следующий важный результат.

Теорема 3.4. Пусть C-непустое выпуклое множество, лежащее в конечномерном линейном пространстве V. Тогда

а) через любую граничную точку множества C проходит по крайней мере одна опорная к C гиперплоскость;

б) через любую относительно граничную точку множества C проходит по крайней мере одна собственная опорная к C гиперплоскость.

В работе указан критерий того, что гиперплоскость является опорной для выпуклого тела.

Теорема 3.5. Пусть C-выпуклое тело в конечномерном евклидовом пространстве V. Гиперплоскость H является опорной к C тогда и только тогда, когда множество $H \cap C$ непусто и содержит граничные, но не содержит внутренних точек множества C.

Заключение. Понятие выпуклости играет важную роль во многих вопросах геометрии и математического анализа. В общем виде это понятие может быть рассмотрено в рамках линейного пространства. Простейшие свойства выпуклых множеств могут быть доказаны для произвольных (бесконечномерных) линейных пространств. Однако для доказательства некоторых важных специальных свойств (к числу которых относятся свойства отделимости), требуется введение в линейном пространстве дополнительных структур, важнейшими из которых являются норма и топология. Наиболее просто эти структуры задаются в конечномерных линейных пространствах, поэтому основные результаты данной дипломной работы об отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями доказаны для конечномерных линейных пространств.