МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Принятие решений в условиях риска и неопределенности

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 –Математика и компьютерные науки
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

РОМАНОВОЙ ЕЛИЗАВЕТЫ ВЛАДИМИРОВНЫ
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
профессор, д.ф.-м.н., профессор В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2020

Введение. Принятие решений является важной частью любой деятельности человека. Принятие неоптимальных решений может повлечь за собой, например, большие финансовые потери. Большинство решений человек принимает в условиях неопределенности и в условиях риска, потому что нельзя в точности спрогнозировать дальнейшие событии или мы не всегда имеем всю нужную нам информацию.

Целью данной работы является рассмотрение основных математических моделей принятия решений в условиях риска и неопределенности.

Структура работы. Работа состоит из следующих разделов:

- Принятие решения в условиях неопределенности;
- Принятие решения в условиях риска;
- Многокритериальные задачи принятия решения;
- Метод нахождение оптимального решения в условиях риска по паре критериев;
- Экспертные методы принятие решения в задачах по нескольким критериям;

Общий объем выпускной квалификационной работы 55 страниц. В процессе написания бакалаврской работы были написана программа для нахождения оптимального решение по критерию Сэвиджа и программа для решения задачи принятия решения в условиях риска по 2-м критериям. Программы написаны на языке программирования Python.

Основное содержание работы. Математическая модель принятия решения представляет собой формализацию схемы для системного описания ЗПР. Для построения математической модели принятия решения необходимо задать следующие три множества:

X — *множество допустимых альтернатив,*

Y — *множество возможных состояний среды,*

A — *множество возможных исходов.*

Принятие решения в условиях неопределенности характеризуется тем, что при выборе альтернативы принимающему решение неизвестно начальное состояние среды и он не имеет никакой информации о вероятностях их появления. Отметим, что эта неопределенность не является абсолютной, так как принимающему решение известно множество возможных состояний среды (множество Y) и известна функция реализации F.

Математическая модель ЗПР в условиях неопределенности может быть задана в виде следующей тройки объектов

$$\langle X, Y, f \rangle$$

где X — множество допустимых альтернатив, Y — множество возможных состояний среды, $f : X \times Y \to R$ — целевая функция. В случае, когда множество альтернатив и множество состояний среды в ЗПР являются конечными, функция выигрыша принимающего решение может быть задана таблицей вида (a_{ij}) , где $i = 1, \ldots, n$ - множество альтернатив, $j = 1, \ldots, m$ - множество состояний среды и a_{ij} есть выигрыш принимающего решение в ситуации, когда он выбирает альтернативу i , а среда принимает состояние j.

Затем, для данной таблицы используется *принцип доминирования по Парето* для сравнения двух альтернатив. Его можно описать следующим образом: альтернатива i_1 доминирует альтернативу i_2 по Парето, если при любом состоянии среды выигрыш принимающего решение при выборе им альтернативы i_1 будет не меньше, чем его выигрыш при выборе альтернативы i_2. Доминирование одной альтернативы над другой будем записывать в виде $i_1 \overset{d}{\geq} i_2$.

Если $i_1 \overset{d}{\geq} i_2$, то альтернатива i_1 называется доминирующей, а альтернатива i_2 — доминируемой. Принцип доминирования состоит в отбрасывании доминируемых альтернатив.

Для решения задач принятия решений в условиях неопределенности рассмотрены следующие типы критериев.

Критерий Лапласа основан на гипотезе равновозможности и может быть сформулирован в виде: "Поскольку мы ничего не знаем о состояниях среды, надо считать их равновероятными". При принятии данной гипотезы в качестве оценки i–й альтернативы выступает среднеарифметическое выигрышей, стоящих в i–й строке матрицы выигрышей. Таким образом, оценка по критерию Лапласа имеет вид:

$$L(i) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_i^j \tag{1.1}$$

Критерий Вальда основан на гипотезе антагонизма, которая может быть сформулирована в виде: "При выборе решения надо рассчитывать на самый худший возможный вариант". При принятии данной гипотезы оценкой альтернативы i служит число $\underline{W}(i) = \min\limits_j a_i^j$ и сравнение любых двух альтернатив производится по величине критерия W. Оптимальной в этом случае будет альтернатива, максимизирующая функцию W, то есть та альтернатива i^* , для которой выполняется

$$\underline{W}(i^*) = \max_i \underline{W}(i) = \max_i \min_j a_i^j. \tag{1.2}$$

Альтернатива i^* называется максиминной, а число $\max\limits_i \min\limits_j a_i^j$ называется максимином. Принцип оптимальности, по которому оптимальной альтернативой считается максиминная альтернатива, называется принципом максимина.

Критерий Гурвица связан с введением показателя $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, называемого*показателем пессимизма.* Гипотеза о поведении среды состоит в этом случае в том, что при любом выборе альтернативы наихудший для принимающего решения вариант реализуется с вероятностью α, а наилучший — с вероятностью $1-\alpha$. Тогда оценкой альтернативы i является взвешенная сумма

$$H_\alpha(i) = \alpha \min_j a_i^j + (1-\alpha)\max_j a_i^j. \tag{1.3}$$

При $\alpha = 1$ данный критерий превращается в "критерий крайнего пессимизма"(то есть в критерий Вальда), а при $\alpha = 0$ — в "критерий крайнего оптимизма".

Критерий Сэвиджа основан на преобразовании первоначальной матрицы выигрышей (a_i^j) в матрицу (r_i^j) — матрицу рисков. Риском при выборе альтернативы i в состоянии j называется число $r_i^j = \beta^j - a_i^j$, где $\beta^j = \max\limits_i a_i^j$. Содержательно r_i^j интерпретируется как "мера сожаления"возникающего от незнания истинного состояния среды. Если мы знали истинное состояние среды, то $r_i^j = \beta^j$.

Для критерия Сэвиджа оптимальной считается альтернатива, минимизирующая максимальный риск.

Принятие решения в условиях риска характеризуется тем, что поведение среды носит случайный характер, причем в этой случайности имеются закономерности стохастического типа. В общем случае это проявляется в том, что существует некоторая вероятностная мера, в соответствии с которой возникают те или иные состояния среды. При этом принимающий решение имеет определенную информацию о вероятностях появления состояний среды, которая по своему характеру может быть весьма разнообразной.

Изучение математической модели ЗПР в условиях риска предполагает, кроме задания функции реализации, задание некоторой дополнительной информации о вероятностях состояний среды. Наиболее простой для анализа случай — когда эта дополнительная информация представлена в виде вероятностной меры на множестве состояний среды. Если множество состояний среды Y конечно, $Y = \{1, \ldots, m\}$, то вероятностная мера на нем может быть задана *вероятностным вектором*, то есть вектором $y = (y_1, \ldots, y_m)$, где $y_j \geq 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} y_j = 1$. В данном выражении y_j есть вероятность наступления состояния $j = 1, \ldots, m$.

Предметом изучения являются задачи принятия решений, в которых целевая функция (функция выигрыша) представлена в виде таблицы — матрицы выигрышей $\|a_i^j\|$ $(i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$ и принимающему решение известен вероятностный вектор $y = (y_1, \ldots, y_m)$.

Наиболее естественной числовой характеристикой случайной величины ξ является ее математическое ожидание. Если для ЗПР в условиях риска в качестве критерия для сравнения альтернатив взять математическое ожидание соответствующей случайной величины, иначе говоря - ожидаемый выигрыш, то оптимальной следует считать альтернативу, максимизирующую ожидаемый выигрыш.

Для ЗПР в условиях риска критерий ожидаемого выигрыша не всегда является адекватным. Поэтому он должен быть трансформирован с учетом возможных отклонений случайной величины от ее среднего значения.

В теории вероятностей в качестве меры отклонения случайной величины от ее среднего значения обычно берется дисперсия $D\xi$ или среднеквадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{D\xi}$. Напомним, что формально дисперсия определяется как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее ожидаемого значения: $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$.

Технически удобней здесь использовать среднеквадратичное отклонение σ, так как при изменении масштаба измерения σ изменяется пропорционально. Для ЗПР в условиях риска будем рассматривать в качестве показателя риска среднеквадратичное отклонение σ.

Приведены следующие определение задачи 2–критериальной оптимизации, где в качестве частных критериев выступают M и σ.

Определение 1. Задача принятия решений называется многокритериальной, если исходы оцениваются по m критериям, где $m > 1$.

Определение 2. Многокритериальная задача принятия решений называется 2–критериальной, если исходы оцениваются по $m = 2$ критериям.

Основная сложность в решение многокритериальных задач состоит в том, что в них, в отличие от однокритериальных задач, появляется эффект несравнимости исходов. Другими словами, если исходы оцениваются по двум критериям, несводимым один к другому, и исход a_1 лучше исхода a_2 по первому критерию, но хуже по второму критерию, то исходы a_1 и a_2 будут несравнимыми между собой.

Математическая модель задачи принятия решения при многих критериях может быть представлена в виде $\langle D; f_1, \ldots, f_m \rangle$, где D - некоторое множество допустимых исходов, f_j - числовая функция, заданная на множестве D; при этом $f_j(a)$ есть оценка исхода $a \in D$ по j-му критерию $(j = 1, \ldots, m)$. Такая модель соответствует задаче принятия решения в условиях определенности, в которой множество альтернатив отождествляется с множеством допустимых исходов, а оценочная структура задается вектором $(f_1, \ldots, f_m)$.

Далее сформулирован принцип Парето.

Определение 3. Пусть Y_j - множество значений функции f_j , то есть множество всех оценок по j-му критерию ($j = 1, \dots, m$). Тогда множество $Y = \prod_{j=1}^{m} Y_j$, состоящее из всевозможных упорядоченных наборов оценок по критериям $1, \dots, m$, называется множеством векторных оценок. Любой элемент $y \in Y$ представляет собой вектор: $y = (y_1, \dots, y_m)$, где $y_j \in Y_j$.

Определение 4. Для всякого исхода $a \in D$ набор его оценок по всем критериям, то есть набор $(f_1(a), \dots, f_m(a))$ есть векторная оценка исхода a.

Определение 5. Говорят, что векторная оценка $y = (y_1, \dots, y_m)$ доминирует по Парето векторную оценку $y' = (y'_1, \dots, y'_m)$, если для всех $j = 1, \dots, m$ выполняется неравенство $y_j \geq y'_j$, причем по крайней мере для одного индекса $j = 1, \dots, m$ неравенство должно быть строгим. Будем записывать доминирует по Парето как:

$$y_j \overset{Par}{>} y'_j \tag{3.1}$$

В рамках задачи многокритериального выбора принцип Парето может быть сформулирован в виде утверждения о том, что множество выбираемых решений содержится в множестве Парето, то есть каждое выбираемое решение является Парето-оптимальным.

Иногда требуется "соединить" указанные два критерия в единый (обобщенный) критерий. Например, в качестве обобщенного критерия возьмем

$$q(M, \sigma) = M - \lambda\sigma, \tag{3.2}$$

где λ — некоторая постоянная. Иначе говоря, (3.2) представляет собой взвешенную сумму частных критериев M и σ с весовыми коэффициентами 1 и -λ. Если $\lambda > 0$ оценка случайной величины с помощью обобщенного критерия будет меньше, чем ее среднее значение, что является характерным для осторожного человека, то есть человека, не склонного к риску. Иначе, если $\lambda < 0$ оценка будет больше, чем ее среднее значение, что характеризует человека, склонного к риску. А при $\lambda = 0$ оценка случайной величины совпадает с ее средним значением, что характеризует человека, безразличного к риску. В качестве основного мы будем далее рассматривать случай при $\lambda > 0$.

По величине показателя λ можно сказать о мере склонности или несклонности к риску. Для этого нужно воспользоваться неравенством Чебышева.

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

$D(X)$ в этом определение - дисперсия случайной величины X.

Далее описано как устанавливается предпочтение альтернатив по обобщенному критерию . Будем считать, что $\lambda > 0$. Как показано выше, в этом случае принимающий решение стремится увеличить ожидаемый выигрыш и уменьшить риск, иначе говоря критерий M будет здесь позитивным, а критерий σ — негативным. Пусть a_i — некоторое множество альтернатив, каждая из которых характеризуется парой показателей (M_i, σ_i). Зафиксируем две альтернативы $a_{i_1} = (M_{i_1}, \sigma_{i_1})$ и $a_{i_2} = (M_{i_2}, \sigma_{i_2})$. Найдем $q(a_{i_1}) = M_{i_1} - \lambda\sigma_{i_1}, q(a_{i_2}) = M_{i_2} - \lambda\sigma_{i_2}$. Возможно два случая.

Первый случай: альтернативы a_{i_1} и a_{i_2} сравнимы по Парето. Пусть, например $a_{i_1} \overset{Par}{>} a_{i_2}$. В этом случае $M_{i_1} \geq M_{i_2}$ и $\sigma_{i_1} \geq \sigma_{i_2}$, причем выполняется условия, что хотя бы одно неравенство строгое. Получим $M_{i_1} - \lambda\sigma_{i_1} > M_{i_2} - \lambda\sigma_{i_2}$, то есть $q(a_{i_1}) > q(a_{i_2})$. В этом случае мы можем сделать вывод, что независимо от меры несклонности принимающего решение к риску альтернатива a_{i_1} будет более предпочтительной, чем альтернатива a_{i_2}. Будем записывать это ввиде $a_{i_1} \succ a_{i_2}$.

Второй случай: альтернативы a_{i_1} и a_{i_2} несравнимы по Парето. Будем считать что $M_{i_1} > M_{i_2}$ и $\sigma_{i_1} > \sigma_{i_2}$, то есть больший ожидаемый выигрыш здесь всегда сопровождается большим риском. Условие $M_{i_1} - \lambda\sigma_{i_1} > M_{i_2} - \lambda\sigma_{i_2}$ равносильно тому, что $\lambda < (M_{i_1} - M_{i_2})/(\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2})$. В итоге получим следующие неравенства:

$$a_{i_1} \succ a_{i_2}, \qquad \lambda < (M_{i_1} - M_{i_2})/(\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}), \tag{3.3}$$

$$a_{i_2} \succ a_{i_1}, \qquad \lambda > (M_{i_1} - M_{i_2})/(\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}). \tag{3.4}$$

Предпочтение между альтернативами a_{i_1} и a_{i_2} будет зависеть от того, какое из условий: (3.3) и (3.4) – будет выполнено.

Недостатком критерия (3.2) можно назвать то, что он базируется на предположении постоянства меры несклонности к риску для данного лица, принимающего решение. Это означает, что локальный коэффициент замещения между критериями M и σ постоянный. В реальности же мера склонности к риску имеет переменчивый характер, в зависимости от величины ожидаемого выигрыша и степени риска. Эту ситуацию улучшает то обстоятельство, что для установления ранжирования альтернатив достаточно знать интервал содержащий показателя λ.

Для ЗПР в условиях риска рассмотрены следующие процедуры нахождения оптимального решения, основанные на отношении доминирования по Парето. Для определенности установлено, что принимающий решение не склонен к риску. В этом случае критерий ожидаемого выигрыша будет позитивным, а критерий риска — негативным. Пусть необходимо выбрать одну оптимальную альтернативу из заданного множества допустимых альтернатив, обозначаемые как a_i. Каждая из альтернатив характеризуется парой показателей — (M_i, σ_i). Это было показано на рисунке 1.

Условие доминирования по Парето $a_{i_1} \overset{Par}{\geqq} a_{i_2}$ означает, что для альтернативы a_{i_1} получается такой же или больший ожидаемый выигрыш, что и для альтернативы a_{i_2} , но с меньшим или таким же риском.

Рассмотрены процедуры сужения множества Парето–оптимальных альтернатив.

1) *Субоптимизация.* Она связана с выбором одного критерия и назначением нижних границ по остальным критериям. Для нашего примера более значимым является критерий ожидаемого выигрыша, поэтому необходимо провести субоптимизацию следующим образом: назначить нижнюю границу по критерию M и оптимизировать, другими словами — минимизировать, оставшийся критерий σ. Обратимся к рисунку 1. Если взять в качестве нижней границы критерия ожидаемого выигрыша значение M_6, то оптимальной

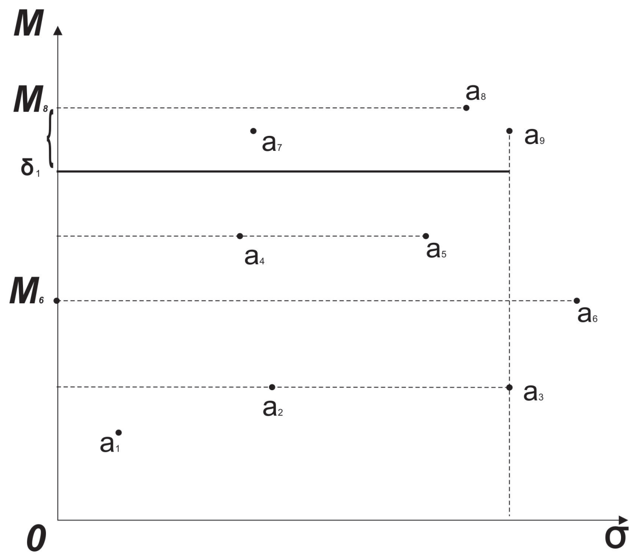

Рисунок 1

будет альтернатива a_4, так как среди альтернатив, удовлетворяющих условию $M_i \geq M_6$, она является наименее рискованной.

2) *Лексикографическая оптимизация.* Она предполагает упорядочение критериев по относительной важности. Пусть, например, M — важнейший критерий. Так как максимальное значение по этому критерию имеет единственная альтернатива a_8, то данная альтернатива и будет являться оптимальной. На этом примере наглядно проявляется недостаток метода лексикографической оптимизации: мы учитываем одни (важнейший) критерий. Этот недостаток связан с необходимостью введения жесткого приоритета критериев. Мы можем ослабить "жесткость" приоритетов следующим образом. Назначим некоторую "уступку" δ_1 по важнейшему критерию и на первом шаге отберем те альтернативы, для которых оценка по важнейшему критерию отличается от максимальной оценки не более, чем на δ_1. После этого назначаем "уступку" δ_2 для 2–го по важности критерия и среди отобранных на первом шаге альтернатив выбираем те, для которых оценка по 2–му критерию отличается от максимальной не более, чем на δ_2 и т.д.

Также описаны экспертные методы принятие решения в задачах по нескольким критериям предложенный Т.Л.Саати. Он основан на парных сравнениях объектов выбора по различным критериям с использованием десятибалльной шкалы и последующим ранжированием набора объектов по всем критериям и целям.

К основным процедурам данного метода относятся следующие: генерация множества объектов выбора; формирование множества критериев для оценки объектов выбора и представление его в виде иерархии, в которой разрешены связи «многие ко многим»; выявление предпочтений экспертов на множестве объектов по различным критериям; установление относительной важности влияния критериев на цель выбора и другие критерии; получение ранжированных наборов объектов по всем критериям и целям.

Примером экспертной оценки является нечеткий метод Дельфы. Реализация этого метода состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Экспертам E_r $(r = \overline{1,n})$ предлагается дать оценки некоторого параметра, определив минимальное a_1^r , наиболее правдоподобное a_M^r и максимальное a_2^r значения. Оценки, данные экспертами, представляются в виде треугольных нечетких чисел: $A_r = (a_1^r, a_M^r, a_2^r), r = \overline{1,n}$.

Шаг 2. Вычисляется среднее треугольное нечеткое число $A_{average} = (m_1, m_M, m_2)$ на основе треугольных нечетких чисел всех экспертов:

$$A_{average} = (m_1, m_M, m_2) = (\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} a_1^r, \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} a_M^r, \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} a_2^r).$$

Затем для каждого эксперта E_r вычисляется величина отклонения между $A_{average}$ и A_r, определяемая следующим треугольным нечетким числом:

$$\begin{gathered} A_{average} - A_r = (m_1 - a_1^r, m_M - a_M^r, m_2 - a_2^r) = \\ = (\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} a_1^r - a_1^r, \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} a_M^r - a_M^r, \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} a_2^r - a_2^r). \end{gathered}$$

Величина $A_{average} - A_r$ передается экспертам для анализа.

Шаг 3. Каждый эксперт E_r предлагает новое треугольное число

$$A_r = (a_1^r, a_M^r, a_2^r), r = \overline{1,n}.$$

Этот процесс, начиная с шага 2, повторяется до тех пор, пока не будет получено такое среднее треугольное нечеткое число $A_{average} = (m_1, m_M, m_2)$, параметры которого будут достаточно близки к соответствующим параметрам треугольных нечетких чисел $A_r = (a_1^r, a_M^r, a_2^r), r = \overline{1, n}$.

Заключение.Таким образом, при принятие решений необходимо учитывать множество факторов. Не один из методов определение наилучшего решения задач принятия решений в условиях риска и неопределенности не дает точный результат. При принятие решение последнее слово при выборе той или иной альтернативы остается за человеком, который это решение должен принять.