МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Компьютерной алгебры и теории чисел

ОТЧЕТ ПО ПРЕДДИПЛОМНОЙ ПРАКТИКЕ

студента (ки) 4 курса 421 группы
направления 02.03.01- Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Рябоконенко Елены Анатольевны

Место прохождения практики: Кафедра КАиТЧ
Сроки прохождения практики 06.02.2020-07.05.2020
Оценка

Руководитель практики от СГУ
доцент, к.ф. – м.н., доцент ____________ Е.В. Сецинская

Саратов 2020

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Обобщение леммы Гензеля

АВТОРЕФЕРАТ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук
механико-математического факультета

Рябоконенко Елены Анатольевны

Научный руководитель
зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент ________________ А.М.Водолазов

Зав. кафедрой
зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент ________________ А.М.Водолазов

Саратов 2020

Введение. P-адические числа появились в работах К.Гензеля в начале XX века и находили приложение в алгебре и теории чисел. В конце XX века начала развиваться p-адическая математическая физика- раздел современной математической физики, основанный на использовании p-адических чисел, p-адического анализа для построения моделей физических явлений. Одним из основных мотивов для развития этого направления послужила гипотеза о неархимедовой структуре пространства-времени на планковских масштабах. Другим существенным стимулирующим фактором явилось использование p-адических методов для построения моделей сложных иерархических систем. В частности, было показано, что модели p-адической теории поля есть естественный непрерывный аналог иерархических моделей статистической физики. Такого рода модели нашли применение при описании динамики сложных белковых молекул, породив целое направление исследований по применению методов p-адической математической физики в биологии и теории сложных систем.

В моей бакалаврской работе описан новый способ представления p-адических функций, а именно, так называемое подкоординатное представление. Основной особенностью подкоординатного представления p-адических функций является то, что значения функции f заданы в канонической форме представления p-адического числа. При этом сама функция f-определяется набором p-значных функций, отображающих множество $\{0, 1, ..., p-1\}$ в себя, и порядком использования этих функций для определения значения функции f. Также в работе приведены соотношения, которые позволяют перейти от подкоординатного представления 1-липшицевой функции к ее представлению рядом ван дер Пута. Эффективность использования подкоординатной формы представления p-адических функций проиллюстрирована на задаче исследования возможностей обобщения леммы Гензеля.

Данная работа состоит из таких разделов как:

- Начальные сведения. В данном разделе рассматриваются понятие пополнения, поле р-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, лемма Гензеля и сравнения, а также приведены алгебраические свойства целых p-адических чисел.

- Топология пространства $\mathbb{Q}_p$ в сравнении с топологией $\mathbb{R}$. В разделе приведены основные топлогические свойства и рассмотрено канторово множество.
- Р-адические числа. В данном разделе рассмотрены подкоординатное представление функций, подкоординатное представление и ряды ван дер Пута, обобщение леммы Гензеля.

Основное содержание работы. Действительные числа, получаются из рациональных с помощью процедуры, которая называется пополнением. Эту процедуру можно применить к любому метрическому пространству, т.е пространству M с функцией расстояния d.

Последовательность $\{r_n\}$ точек метрического пространтсва M называется последовательностью Коши, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что если $n, m > N, d(r_n, r_m) < \varepsilon$. Если любая последовательность Коши из M имеет предел в M, то M называется полным метрическим пространством. Если пространство M не полное, то существует такое метрическое пространство $\overline{M}$, что

1. $\overline{M}$ полное;
2. $\overline{M}$ содержит подмножество $\overline{M}_0$, изометричное пространству M;
3. $\overline{M}_0$ всюду плотно в $\overline{M}$;

Доказательство представляет собой явную конструкцию пополнения $\overline{M}$. Его элементы - это классы эквивалентности последовательностей Коши из M.

Для $M = \mathbb{Q}$ имеем обычное евклидово расстояние между рациональными числами :

$$d(r_1, r_2) = |r_1 - r_2| \,.$$

Заметим , что расстояние «получается» из евклидовой нормы на $\mathbb{Q}$, которая представляет собой абсолютную величину и является обычням расстоянием на «числовой оси».

Теорема 1.3.(лемма Гензеля). Пусть $F_x = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n -$ многочлен с целыми р-адическими коэффициентами. Пусть

$$F'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + ... + nc_n x^{n-1}$$

- производная многочлена $F(x)$. Предположим, что p-адическое число $\bar{a}_0$ удовлетворяет сравнению $F(\bar{a}_0) \equiv 0(mod \quad p)$, причем $F'(\bar{a}_0) \not\equiv 0(mod \quad p)$. Тогда существует единственное целое целое p-адическое число a, такое что $F(a_0) = 0$ и $a \equiv \bar{a}_0(mod \quad p)$.

Доказательство. Доказательсво существования числа a состоит в построении канонического p-адического разложения $a = b_0+b_1p+b_2p^2+...$ по индукции. На k-м шаге индукции, используя p-адическую модификацию метода Ньютона, получим k-е приближение числа a, имеющее вид $a_k = b_0 + ... + b_kp^k$. Каждое a_k будет корнем многочлена $F(x)$ только « по модулю p^{k+1}».В пределе при $k \to \infty$ получим число a, которое будет «настоящим» корнем многочлена F.

Более точно, докажем индукцией по k следующее утверждение:

$S(k)$: существует такое целое $p-$адическое число вида

$$a_k = b_0 + b_1p + ... + b_kp^k$$

(цифры b_i лежат в множестве $\{0, 1..., p-1\}$ для всех i), что

$$F(a_k) \equiv 0 \quad (mod \quad p^{k+1}) \quad \text{и} \quad a_k \equiv \bar{a}_0(mod \quad p).$$

База индукции очевидна: возьмем b_0 равным первой p-адической цифре числа $\bar{a}_0$, тогда получим $a_0 \equiv \bar{a}_0$ и $F(a_0) \equiv 0 \quad (mod \quad p)$.

Теперь выполним шаг индукции, т.е. докажем, что из $S(k-1)$ следует $S(k)$. Для этого положим $a_k = a_{k-1} + b_kp^k$, где цифра b_k (пока неизвестная) удовлетворяет неравенству $0 \leqslant b_k < p$. Распишем $F(a_k)$, игнорируя слагаемые, кратные p^{k+1}:

$F(a_k) = F(a_{k-1} + b_kp^k) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i(a_{k-1} + b_kp^k)^i = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i(a_{k-1}^i + ia_{k-1}^{i-1}b_kp^k+$ слагаемые, кратные $p^{k+1}) \equiv F(a_{k-1}) + b_kp^kF'(a_{k-1}) \quad (mod \quad p^{k+1})$.

Так как по предположению индукции $F(a_{k-1}) \equiv 0 \quad (mod \quad p)$, выражение для $F(a_k)$ можно переписать в виде

$$F(a_k) \equiv \alpha_kp^k + b_kp^kF'(a_{k-1)} \quad (mod \quad p^{k+1})$$

для некоторого целого $\alpha_k \in \{0, 1, ..., p-1\}$. Таким образом, получаем следующее уравнение для неизвестной цифры b_k:

$$\alpha_k + b_k F'(a_{k-1} \equiv 0 \pmod{p},$$

которое легко решается при условии $F'(a_{k-1}) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Но это условие конечно же, выполнено, так как $a_{k-1} \equiv \bar{a}_0 \pmod{p}$, и поэтому

$$F'(a_{k-1}) \equiv F'(\bar{a}_0) \not\equiv \pmod{p}.$$

Разделив на $F'(a_{k-1})$, находим требуемую цифру b_k:

$$\tfrac{-\alpha_k}{F'(a_k-1)} \pmod{p},$$

для которой выполнено сравнение $F(a_k) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$. Тем самым, шаг индукции завершен.

Теперь положим

$$a = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + ...$$

Заметим, что $F(a) = 0$, так как для всех k имеем

$$F(a) \equiv F(a_k) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}.$$

Единственность числа a вытекает из единственности последовательности $\{a_k\}$.

Определение 3.1. p-адические числа. p-адическая норма $|\cdot|_p$ для любого простого числа p определяется следующим образом. Для всех ненулевых чисел n пусть $ord_p(n)$ обозначает наибольшую степень числа p, которая делит n, т.е.

$$n \equiv 0 (mod \quad p^{ord_p(n)}), \quad n \not\equiv 0 (mod \quad p^{ord_p(n)+1}).$$

Тогда зададим

$$|n|_p = p^{-ord_p(n)}, \quad |0|_p = 0.$$

Для рациональных чисел $n/m \in \mathbb{Q}$ зададим

$$\left|\tfrac{m}{n}\right|_p = p^{-ord_p(n)+ord_p(m)}.$$

Пополнение $\mathbb{Q}$ по p-адической метрике $\rho_p(x,y) = |x-y|_p$ называется полем p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Метрика ρ_p удовлетворяет так называемому сильному неравенству треугольника $|x \pm y|_p \leqslant max(|x|_p ; |y|_p)$, для которого равенство выполняется при $|x|_p \neq |y|_p$.

Множество $\left\{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leqslant 1\right\}$ называется множеством p- адических чисел $\mathbb{Z}_p$.

Каждое число $x \in \mathbb{Z}_p$ может быть записано в каконическом виде, а именно, в виде сходящегося по p-адической норме ряда :

$$x = x_0 + px_1 + ... + p^k x_k + ..., \quad x_k \in \{0, 1, ..., p-1\}, k \geqslant 0.$$

Частичные суммы этого ряда будем обозначать через $[x]_k$, т.е.

$$[x]_k = x_0 + px_1 + ... + p^{k-1} x_{k-1}, \quad k \geqslant 1.$$

Если вычеты кольца $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ задать минимальными положительными целыми числами, то для $x \in \mathbb{Z}_p$ можем рассматривать выражение $x(mod \quad p^k)$ в том смысле, что

$$x \quad (mod \quad p^k) = [x]_k \quad \text{или} x \equiv [x]_k \quad (mod \quad p^k) \tag{3.1}$$

Пусть $a \in \mathbb{Z}_p$ и r положительное целое число. Тогда множество

$$B_{p^{-r}}(a) = \left\{x \in \mathbb{Z}_p : |x-a|_p \leqslant p^{-r}\right\} = a + p^r \mathbb{Z}_p$$

является шаром радиуса p^{-r} с центром в точке a.

Определение 3.2.р-адические функции.Будем рассматривать функции $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, которые удовлетворяют условию Липшица с константой $p^\alpha, \alpha \geqslant 0$ (т.е. $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$). $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ является p^α-липшицевой функцией, если

$$|f(x) - f(y)|_p \leqslant p^\alpha |x-y|_p \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}_p.$$

Эти условия эквивалентно утверждению, что из $x \equiv y \quad (mod \quad p^k)$ следует, что $f(x) \equiv f(y) \quad (mod \quad p^{k-\alpha})$ для любых $k \geqslant 1 + \alpha$.

Класс 1-липшицевых функций (т.е. при $\alpha = 0$) занимает специальное место. Это связано со следующей причиной. Любая p^α-липшицева функция f представима через p^α подходящих 1-липшицевых функций, а именно,

$$f(a+p^\alpha x)=\sum_{i=0}^{p^\alpha-1} I_i(a)\cdot f_i(x), \quad a\in\{0,...,p^\alpha-1\} \tag{3.2}$$

где $f_i(x):\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_p, i\in\{0,...,p^\alpha-1\}$, являются 1-липшицевыми функциями, $I_i(a)=1$ как только $a=i$, иначе $I_i(a)=0$.

Определение 3.3. Ряды ван дер Пута. Будем пользоваться представлением p- адических функций в виде ряда ван дер Пута, который определяется следующим образом. Пусть $f:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_p$- непрерывная функция. Тогда существует единственная последовательность p- адических коэффициентов $B_0,B_1,B_2,...$ таких, что

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} B_m\chi(m,x) \tag{3.3}$$

для всех $x\in\mathbb{Z}_p$. Характеристическая функция $\chi(m,x)$ определяются как

$$\chi(m,x)=\begin{cases}1, & \text{если } |x-m|_p\leqslant p^{-n},\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $n=0$ при $m=0$, и n определено единственным образом черех неравенство $p^{n-1}\leqslant m\leqslant p^n-1$ при $m\neq 0$. Число n из определения $\phi(m,x)$ обладает естественной интерпретацией. Это всего лишь число разрядов в каноническом представлении числа $m\in\mathbb{N}_0$ по основанию p. Таким образом,

$\lfloor log_p m\rfloor$ =(число разрядов в разложении по основанию p числа m)-1,

следовательно, $n=left\lfloor log_p m+1$ для всех $m\in\mathbb{N}_0$ и $left\lfloor log_p 0=0$; напомним, что $\lfloor\alpha\rfloor$ обозначает целую часть от α.

Коэффициенты B_m соотносятся со значениями функции f следующим образом. Пусть $m=m_0+...+m_{n-2}p^{n-2}+m_{n-1}p^{n-1}, m_j\in\{0,...,p-1\}, j=$

$0, 1, ..., n-1$, и $m_{n-1} \neq 0$, тогда

$$B_m = \begin{cases} f(m) - f(m - m_{n-1}p^{n-1}), & \text{если} m \geqslant p, \\ f(m) & \text{в противоположном случае.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Представим возможность задания p-адических функций в подкоординатной форме. Основной особенностью такого представления является то, что значения функции f заданы в канонической форме записи p-адического числа. При этом сама функция f определяется набором p-значных функций, отображающих множество $\{0, 1, ..., p-1\}$ в себя, и порядком использования этих функций для определения значения f. В предложении 3.1 находим связь между подкоординатной формой представления p-адических функций и ее рядом ван дер Пута.

В теореме 3.1 подкоординатное представление определяется для p-адических функций $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, которые удовлетворяют условию Липшица с константой 1. Однако подкоординатное представление может быть использовано и для p^α-липшицевых функций ($\alpha \geqslant 1$). Эта возможность следует из теоремы 3.1. В этой теореме утверждается, что p^α-липшицева функция задается набором из p^α 1-липшицевых функций с помощью соотношения (3.2). Поэтому для задания p^α-липшицевых функций в подкоординатной форме достаточно задать все 1-липшицевы функции $f_i, 0 \leqslant i^\alpha - 1$, в подкоординатной форме. Подкоординатная форма представления 1-липшицевых функций определяется в следующей теореме.

Теорема 3.1. Пусть функция $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ является 1-липшицевой. Тогда существуют p-значные функции

$$\varphi_0 : \{0, 1, ..., p-1\} \to \{0, 1, ..., p-1\}, \quad \varphi_{k,a} : \{0, 1, ..., p-1\} \to \{0, 1, ..., p-1\}, \quad a \in \left\{0, 1, ..., p^k - 1\right\}, \quad k \geqslant 1,$$

такие что

$$\text{f(x)=f(x}_0 + p \cdot x_1 + ... + p^k \cdot x_k + ...) = \varphi_0(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} p^k \sum_{a=0}^{p^k-1} I_a([x]_k)\varphi_{k,a}(x_k) (3.5)$$

где

$$I_a([x]_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } [x]_k = a, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

Замечание 3.1. Между представлением в форме (3.5) и координатным представлением p-адических функций имеется простая связь. Любое отображение $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ может быть записано в координатной форме

$$f(x) = \delta_0(f(x)) + p\delta_1(f(x)) + ... + p^k\delta_k(f(x)) + ... \qquad (3.8)$$

где функции $\delta_k : \mathbb{Z}_p \to \{0, 1, ..., p-1\}$ определены следующим образом. Пусть целое p-адическое число x представлено в каноническом виде

$$x = x_0 + px_1 + ... + p^k x_k + ..., \quad x_k \in \{0, 1, ..., p-1\};$$

тогда $\delta_k(x) = x_k, k \geqslant 0$. Функция f является 1-липшицевой тогда и только тогда, когда для каждого $k \geqslant 1$ k-я координатная функция $\delta_k(f(x))$ не зависит от $\delta_{k+s}(x)$ для всех $s \geqslant 1$, т.е. $\delta_k(f(x + p^{k+1}\mathbb{Z}_p)) = \delta_k(f(x))$ для всех $x \in \left\{0, 1, ..., p^{k+1} - 1\right\}$ или

$$\delta_k(f(x)) = \delta_k(f(x_0 + px_1 + ... + p^k x_k + ...)) = \Delta_{f,k}(x_0, x_1, ..., x_k).$$

Тогда

$$f(x) = f(x_0 + px_1 + ... + p^k x_k + ...) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k \Delta_{f,k}(x_0, x_1, ..., x_k),$$

где $\Delta_{f,k}$ является p-значной функцией, которая отображает декартово произведение $k+1$ экземпляров множества $\{0, 1, ..., p-1\}$ в себя и $k \geqslant 0$. функции $\Delta_{f,k}$ могут быть заданы с помощью своих подфункций, полученных фиксацией переменных $x_0, x_1, ..., x_{k-1}$. Эти подфункции совпадают с φ_0 и $\varphi_{k,a}(x), a \in \left\{0, 1, ..., p^k - 1\right\}$, из (2.1), т.е.

$$\Delta_{f,0} = \varphi_0, \quad \Delta_{f,k} = \sum_{a=0}^{p^k-1} I_a([x]_k)\varphi_{k,a}, \quad k \geqslant 1,$$

где

$$I_a([x]_k) = \begin{cases} 1, & \text{где } [x]_k = a, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

В этом пункте будем использовать подкоординатное представление p-адических функций $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ для изучения вопроса о возможеости обобщения леммы Гензеля. В связи с этим рассматривается задача построения критерия разрешимости уравнения $f(x) = M, M \in \mathbb{Z}_p$, где f 1-липшицева функция. В результате получено, что существуют альтернативы.

Если число небиективных функций $\varphi_{k,m}, m \in \left\{0, 1, ..., p^k - 1\right\}, k \geqslant 1$, из подкоординатного представления функции f конечно, то существует $R \in \mathbb{N}$ такое, что проверка наличия корня уравнения $f(x) = M, M \in \mathbb{Z}_p$, сводится к разрешимости сравнения $f(x) \equiv M(modp^R)$. Другими словами, в этом случае лемма Гензеля имеет обобщение (в терминах подкоординатного представления это обобщение представлено в теореме 3.2).

Если число небиективных функций $\varphi_{k,m}, m \in \left\{0, 1, ..., p^k - 1\right\}, k \geqslant 1$, из подкоординатного представления функции f бесконечно, то построить обобщение леммы Гензеля не удается в том смысле, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется $C \in \mathbb{Z}_p$ такое, что $f(x) \equiv C \pmod{p^k}$, но $f(x) \neq C$.

Так же рассматриваем случай, когда все функции φ_0 и $\varphi_{k,m}, m \in \left\{0, 1, ..., p^k - 1\right\}, k \geqslant 1$, из подкоординатного представления 1-липшицевых функций биективны. Этот случай имеет тесную связь с теорией p-адических динамических систем. В частности, все функции, удовлетворяющие этому условию, сохраняют меру.

Теорема 3.2. Пусть $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ 1-липшицева функция, представленная рядом ван дер Пута, и выполнены условия:

1) для некоторого натурального числа R существуют $\bar{a} \in \left\{0, 1, ..., p^R - 1\right\}$ такое, что $f(\bar{a}) \equiv 0 \pmod{p^R}$;

2) для любого $k \geqslant, k \equiv \bar{a} (mod \quad p^R)$, приведенные по модулю p коэффициенты ряда ван дер Пута

$$b_{m+i\cdot p^{1+\lfloor log_p m \rfloor}} \pmod{p}, \quad i = 1, 2, ..., p-1,$$

являются различными ненулевыми вычетами по модулю p

Тогда существует единственное целое число p-адическое число $r \in \mathbb{Z}_p$ такое, что $f(r) = 0$ и $r \equiv \bar{a} (mod \quad p^R)$.

В терминах подкоординатного представления обобщение леммы Гензеля представлено в следуюзей теореме.

Теорема 3.3. Пусть $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ является 1-липшицевой функцией, заданной в подкоординатной форме (3.5). Если справедливо, что:

1) для некоторого натурального числа R существует $\bar{a} \in \left\{0, 1, ..., p^R - 1\right\}$ такое, что $f(\bar{a}) \equiv 0 \pmod{p^R}$;

2) для любых $k \geqslant R$ и $a \geqslant p^R$, где $a \equiv \bar{a} \pmod{p^R}$, функция $\varphi_{k,a}$ биективны.

Тогда существует единственное целое p-адическое число $r \in \mathbb{Z}_p$ такое, что $f(r) = 0$ и $r \equiv \bar{a} \pmod{p^R}$.

Теорема 3.4. Пусть $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ является 1-липшицевой функцией, заданной в подкоординатной форме (3.5). Тогда справедливы утверждения:

1) если $f \in B$, то существует $R \in \mathbb{N}$ такое, что уравнение $f(x) \equiv C \pmod{p^R}$;

2) если $f \notin B$ (т.е. в (2.1) содержится бесконечное число небиективных функций $\varphi_{k,a}$), то для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $C \in \mathbb{Z}_p$ такое, что $f(x) \equiv C \pmod{p^k}$, но $f(x) \neq C$;

3) функция f биективна на $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда, когда любая функция $\varphi_0, \varphi_{k,a}, a \in \left\{0, 1, ..., p^k - 1\right\}, k \geqslant 1$, из (3.5) биективна.

Замечание 3.3. Теорема 3.3 позволяет косвенным образом охарактеризовать границы возможного обобщения леммы гензеля в части задачи поиска корней уравнения $f(x) = M, M \in \mathbb{Z}_p$, для 1-липшицевых функций $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$. Лемму Гензеля можно охарактеризовать следующими обстоятельствами:

1) лемма Гензеля- это критерий, который характеризует наличие корня у p-адической функции f на множестве целых p-адических чисел. С помощью этого критерия можем определить, есть ли у функции f корень в $\mathbb{Z}_p$ путем решения конечного числа сравнений;

2)в конструктивном доказательстве леммы Гензеля приводится итеративная процедура поиска приближенного значения (в p-адической метрике) корня функции f с наперед заданной точностью; эта процедура является p-адическим аналогом метода Ньютона для поиска приближенного значения корня целозначной функции;

3) лемма Гензеля применима для p-адических функций, заданных только с помощью полиномов с целыми p-адическими коэффициентами.

Обобщенная форма леммы Гензеля дает описание 1-липшицевых функций $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, для которых проверка существования корня функции f сводится к решению сравнения по $mod \quad p^R$ для некоторого подходящего значения $R \in \mathbb{N}$. В общем случае для того, чтобы проверить наличие корня функции f, потребуется решить бесконечное число сравнений по $mod \quad p^k, k \in \mathbb{N}$.

Говоря неформально, в теореме 3.3 приводятся условия, при которых можем обобщить лемму Гензеля в классе 1-липшицевых функций, а именно:

1) если в подкоординатном представлении f содержится конечное число небиективных функций $\varphi_{k,a}$, то за конечное число шагов (решения конечного числа сравнений) можем проверить факт наличия (или отсутствия) корня уравнения $f(x) = M, M \in \mathbb{Z}_p$.

2)если в подкоординатном представлении f число небиективных функций $\varphi_{k,a}$ бесконечно (альтернативный случай), то найдется $M \in \mathbb{Z}_p$ такое, что в результате решения конечного числа сравнений не сможем проверить фактналичия (или отсутствия) корня уравнения $f(x) = M$. Это означает, что не можем обобщить лемму Гензеля вне зависимости от выбора $M \in \mathbb{Z}_p$. Отметим, что в этом случае могут существовать $M \in \mathbb{Z}_p$ такие, что можем проверить факт наличия корня $f(x) = M$ путем решения конечного числа сравнений.

Заключение. В моей бакалаврской работе был описан новый способ представления p-адических функций. Также в работе были приведены соотношения, которые позволяют перейти от подкоординатного представления 1-липшицевой функции к ее представлению рядом ван дер Пута. Эффективность использования подкоординатной формы представления p-адических функций проиллюстрирована на задаче исследования возможностей обобщения леммы Гензеля.

В работе были рассмотрены поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, лемма Гензеля и сравнения, подкоординатное представление функций, подкоординатное представление и ряды ван дер Пута, обобщение леммы Гензеля, а также приведены алгебраические свойства целых p-адических чисел и основные топлогические свойства.