МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Функции от матриц и их применение к решению систем дифференциальных уравнений

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Филипенкова Антона Сергеевича

Научный руководитель

доцент,к.ф.-м.н. ________________ О.А. Королева

подпись, дата

Зав.кафедрой

зав.каф.,к.ф.-м.н., доцент ________________ А.М. Водолазов

подпись, дата

Саратов 2020

Введение. Предметом исследования является функция от матрицы, ее свойства и способы ее вычисления. Центральное место в исследовании занимает разложение Жордана функции от матрицы. Также будет рассмотрен численный метод вычисления функции от матрицы - интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра. Исследование является актуальным на сегодняшний день, поскольку алгоритмы вычисления функции от матрицы находят применение в интегрировании систем линейных дифференциальных уравнений. Бакалаврская работа состоит из введения, четырех разделов, заключения и списка литературы. Первый раздел - некоторые базовые сведения, термины и понятия. Второй раздел - подробное изучение характеристического и минимального многочленов матрицы. Третий раздел - изучение функций от матриц и основных способов работы с ними. Четвертый раздел - алгоритм вычисления функции от матрицы и примеры его работы.

Основное содержание работы. Изучим основные понятия, термины и определения, которые встречаются в работе:

Определение 1.1. Матричный многочлен - многочлен с матричным коэффициентом. Скалярный многочлен - многочлен со скалярным коэффициентом.

Определение 1.2. Дополнительный минор M_{ij} - определитель матрицы, получающейся из исходной матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца.

Определение 1.3. Сумма(разность) двух матричных многочленов одного и того же порядка может быть представлена в виде многочлена, степень кторого не превосходит наибольшей из степеней данных многочленов.

Определение 1.4. Произведение двух матричных многочленов равно многочлену, степень которого меньше или равна сумме степеней сомножителей. Если хоть один из сомножителей - регулярный многочлен, то в этом случае степень произведения всегда равна сумме степеней сомножителей.

Определение 1.5. Скалярный многочлен $f(\lambda)$ называется аннулирующим многочленом квадратной матрицы A, если

$$f(A) = 0.$$

Определение 1.6. Правое значение произведения двух матричных многочленов равно произведению правых значений сомножителей, если матрица-аргумент A перестановочна со всеми своими коэффициентами правого сомножителя.

Определение 1.7. Левое значение произведения двух матричных многочленов равно произведению левых значений сомножителей, если матрица-аргумент A перестановочна со всеми своими коэффициентами левого сомножителя.

Определение 1.8. Как правое, так и левое деление матричных многочленов одного и того же порядка всегда выполнимо и однозначно, если делитель - регулярный многочлен.

Определение 1.9. Аннулирующий многочлен $\psi(\lambda)$ наименьшей степени со старшим коэффициентом, равным 1, называется минимальным многочленом матрицы A.

Определение 1.10. Если функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы A, то

$$f(A) = g(A),$$

где $g(\lambda)$ есть любой многочлен, который принимает те же значения на спектре матрицы, что и $f(\lambda)$:

$$f(\Lambda_A) = g(\Lambda_A).$$

Определение 1.11. Для функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы A интерполяционным многочленом Лагранжа-Сильвестра называется многочлен $r(\lambda)$, однозначно определяющийся интерполяционными условиями:

$$r(\lambda_k) = f(\lambda_k), r'(\lambda_k) = f'(\lambda_k), ..., r^{(m_k-1)}(\lambda_k) = f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \quad (k = \overline{1, s}).$$

Теорема 1.1. (обобщенная теорема Безу). При правом(левом) делении матричного многочлена $F(\lambda)$ на бином $\lambda E - A$ остаток от деления равен $F(A)(\widehat{F}(A))$.

Следствие 1.1.1. Многочлен $F(\lambda)$ делится без остатка справа(слева) на бином $\lambda E - A$ тогда и только тогда, когда $F(A) = 0(\widehat{F}(A) = 0)$.

Перед определением понятия функции от матрицы необходимо ввести в рассмотрение несколько других ключевых понятий и теорем. В частности необходимо остановиться подробнее на характеристическом и минимальном многочленах матрицы.

Введем в рассмотрение матрицу $A = \|a_{ik}\|_1^n$.

Определение 1.12. Характеристической матрицей для матрицы A называется матрица вида $\lambda E - A$.

Определение 1.13. Характеристическим многочленом матрицы A называется скалярный многочлен относительно λ, являющийся определителем характерестической матрицы A

$$\Delta(\lambda) = |\lambda E - A| = |\lambda\delta_{ik} - a_{ik}|_1^n.$$

Введем в рассмотрение матрицу $B(\lambda) = \|b_{ik}(\lambda)\|_1^n$.

Определение 1.14. Матрица $B(\lambda) = \|b_{ik}(\lambda)\|_1^n$ это присоединенная матрица для матрицы A, если $b_{ik}(\lambda)$ - алгебраическое дополнение элемента $\lambda\delta_{ik} - a_{ik}$ в определителе $\Delta(\lambda)$.

Теорема 1.2. (Гамильтона-Кэли). Любая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению.

$$\Delta(A) = 0.$$

Теорема 1.3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - все характеристические числа матрицы A, а $g(\mu)$ - некоторый скалярный многочлен. Тогда $g(\lambda_1), g(\lambda_2), ..., g(\lambda_n)$ - все характеристические матрицы $g(A)$.

Теорема 1.4. Если коэффициенты характеристического многочлена известны, то присоединенную матрицу можно найти по формуле:

$$B(\lambda) = \delta(\lambda E, A),$$

где

$$\delta(\lambda E, A) = \frac{\Delta(\lambda)E}{\lambda E - A},$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - ... - p_n.$$

Если матрица A неособенная, то обратную матрицу A^{-1} можно найти по формуле:

$$A^(-1) = \frac{1}{p_n}B_{n-1},$$

где $p_n = (-1)^{n-1}|A|$.

Если λ_0 - характеристическое число матрицы A, то не нулевые столбцы матрицы $B(\lambda_0)$ - собственные векторы матрицы A для $\lambda = \lambda_0$.

Введем понятие минимального многочлена матрицы и рассмотрим некоторые его важные свойства.

Определение 1.15. Аннулирующий многочлен $\psi(\lambda)$ наименьшей степени со старшим коэффициентом, равным 1, называется минимальным многочленом матрицы A.

Теорема 1.5. Произвольный аннулирующий многочлен матрицы всегда делится без остатка на ее минимальный многочлен.

Теорема 1.6. Минимальный многочлен единственен.

Теорема 1.7. Минимальный и характеристический многочлены связаны следующим соотношением:

$$\psi(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)},$$

где $D_{n-1}(\lambda)$ - наибольший общий делитель всех миноров $(n-1)$ порядка матрицы $\lambda E - A$.

Предложение 1.1. Для приведенной присоединенной матрицы $C(\lambda)$ справедливы следующие формулы:

$$C(\lambda) = \Psi(\lambda E, A), \tag{1.1}$$

где

$$\Psi(\lambda, \mu) = \frac{\psi(\lambda) - \psi(\mu)}{\lambda - \mu}; \tag{1.2}$$

$$(\lambda E - A)C(\lambda) = \psi(\lambda)E. \tag{1.3}$$

Теорема 1.8. Корнями минимального многочлена $\psi(\lambda)$ являются все различные между собой характеристические чилса матрицы A.

Теперь непосредственно рассмотрим понятие функции от матрицы, а также способы работы с ними, применение функций от матрицы в системах дифференциальных уравнений.

Пусть дана некоторая квадратная матрица $A = \|a_{ik}\|_1^n$ и скалярная функция $f(\lambda)$. Распространим скалярную функцию $f(\lambda)$ на матричные значения, то есть определим $f(A)$.

Обозначим минимальный многочлен матрицы A:

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}...(\lambda - \lambda_l)^{m_l}, \tag{1.4}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l$ - характеристические числа матрицы A. Степень многочлена $\psi(\lambda)$ есть $m = \sum\limits_{k=1}^{l} m_k$.

Пусть есть два многочлена таких, что

$$g(A) = h(A). \tag{1.5}$$

Тогда $d(\lambda) = g(\lambda) - h(\lambda)$, являясь аннулирующим многочленом для матрицы A, желится на $\psi(\lambda)$ без остатка. Запишем это:

$$g(\lambda) \equiv h(\lambda) \;\; (mod\ \psi(\lambda)). \tag{1.6}$$

Следовательно, в силу (1.4)

$$d(\lambda_k) = 0, d'(\lambda_k) = 0, ..., d^{(m_k-1)}(\lambda_k) = 0 \;\; (k = \overline{1, s}),$$

То есть

$$g(\lambda_k) = h(\lambda_k), g'(\lambda_k) = h'(\lambda_k), ..., g^{(m_k-1)}(\lambda_k) = h^{(m_k-1)}(\lambda_k) \; (k = \overline{1, s}) \tag{1.7}$$

Значениями функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы A являются m чисел:

$$f(\lambda_k), f'(\lambda_k), ..., f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \quad (k = \overline{1, s}). \tag{1.8}$$

Совокупность значений функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы A обозначим $f(\Lambda_A)$.

Если значения (1.8) существуют для функции $f(\lambda)$, то функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы A. Из (1.7) известно, что многочлены $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ имеют одни и те же значений на спектре матрицы A:

$$g(\Lambda_A) = h(\Lambda_A).$$

Определение 1.16. Если функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы A, то

$$f(A) = g(A),$$

где $g(\lambda)$ есть любой многочлен, который принимает те же значения на спектре матрицы, что и $f(\lambda)$:

$$f(\Lambda_A) = g(\Lambda_A).$$

Предложение 1.2. Свойства функций от матриц:

1. Если $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - характеристические числа матрицы A порядка n, то $f(\lambda_1), f(\lambda_2), ..., f(\lambda_n)$ есть полная система характеристических чисел матрицы $f(A)$.

2. Если матрицы A и B подобны и матрица T преобразует $f(A)$ в $f(B)$,

$$f(B) = T^{-1}f(A)T.$$

3. Если $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ - квазидиагональная матрица, то

$$f(A) = \{f(A_1), f(A_2), ..., f(A_n)\}.$$

В дальнейшем необходимо подробнее оставновиться на интерполяционном многочлене Лагранжа-Сильвестра. Именно на основе интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра созданы алгоритмы численного вычисления функций от матриц, которые упрощают многие прикладные и теоретические задачи во многих других разделах математики, в частности: дифференциальные уравнения.

Определение 1.17. Интерполяционным многочленом Лагранжа-Сильвестра для функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы A называется многочлен $r(\lambda)$, однозначно определяющийся интерполяционными условиями:

$$r(\lambda_k) = f(\lambda_k), r'(\lambda_k) = f'(\lambda_k), ..., r^{(m_k-1)}(\lambda_k) = f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \quad (k = \overline{1, s}). \tag{1.9}$$

Определение 1.18. Если функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы A, то $r(\lambda)$ есть соответствующий интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра, и тогда:

$$f(A) = r(A).$$

Замечание 1.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра может быть получен предельным переходом из интерполяционного многочлена Лагранжа.

Определение 1.19. Определим формулу интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра для случая, когда кратных корней нет, или же, при наличии кратных корней, минимальный многочлен, являющийся делителем характеристического, имеет только простые корни:

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\lambda - \lambda_1)...(\lambda - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_{k+1})...(\lambda - \lambda_n)}{(\lambda_k - \lambda_1)...(\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1})...(\lambda_k - \lambda_n)} f(\lambda_k), \tag{1.10}$$

$$f(A) = r(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(A - \lambda_1 E)...(A - \lambda_{k-1} E)(A - \lambda_{k+1} E)...(A - \lambda_n E)}{(\lambda_k - \lambda_1)...(\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1})...(\lambda_k - \lambda_n)} f(\lambda_k). \tag{1.11}$$

Альтернативой численному методу будет решение с помощью разложения Жордана. Дадим несколько ключевых определений.

Определение 1.20. Жордановой клеткой порядка k с собственным значением λ называется квадратная матрица

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Определение 1.21. Матрица J есть жорданова матрица, если J - блочно-диагональная матрица, на диагонали которой стоят жордановы клетки:

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_n}(\lambda_n) \end{pmatrix},$$

где порядки жордановых клеток $k_1, ..., k_n$ не обязательно различны, и элементы поля $\lambda_1, ..., \lambda_n$ не обязательно различны.

Определение 1.22. Говорят, что матрица A имеет простую структуру, если ее элементарные делители имеют первую степень.

Определение 1.23. Квадратная матрица A приводится к жордановой нормальной форме, если существует невырожденная матрица P такая, что матрица $P^{-1}JP$ имеет жорданову нормальную форму.

Теорема 1.9. Для того чтобы две матрицы $A = \|a_{ik}\|_1^n$ и $B = \|b_{ik}\|_1^n$ были подобны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одни и те же инвариантные многочлены, или, что то же, одни и те же элементарные делители в поле K.

Алгоритм, являющейся объектом исследования данной работы, базируется на нахождении разложения Жордана, а конкретнее, матриц P и J, для исходной матрицы A.

Функции от матриц находят применение в интегрировании систем линейных дифференциальных уравнений. Остановимся на примере системы однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n; \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

здесь t-независимое переменное, $x_1, x_2, ..., x_n$ - неизвестные функции переменной t, $a_{ik}(i, k = 1, 2, ..., n)$ - комплексные числа.

Введем в рассмотрение квадратную матрицу $A = \|a_{ik}\|_1^n$, составленную из коэффициентов, и столбцевую матрицу $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Тогда (1.12) можно записать в виде матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{1.13}$$

Положим $f(\lambda) = e^{\lambda t}$. Интегрирование системы дифференциальных уравнений сводится к вычислению элементов следующей матрицы:

$$e^{At} = \|q_{ik}(t)\|_1^n. \tag{1.14}$$

Если в качестве начального значения аргумента принять $t = t_0$, получим:

$$x = e^{A(t-t_0)}x_0.$$

Заключение. В представленной работе был рассмотрен ряд основных определений, связанных с вычислением матричных функций, рассмотрены численные и аналитические методы вычислений матричных функций. Данная тема достаточно актуальна, поскольку проблема вычисления функции от матрицы часто встречается во многих областях математики. Автоматизация этого процесса существенно облегчит решение многих прикладных задач.