МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Метрическая геометрия p-кольца

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 –Математика и компьютерные науки
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

ЯЗЫНИНОЙ АНГЕЛИНЫ ИЛЬИНИЧНЫ
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ______ В.Б.ПОПЛАВСКИЙ
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
профессор, д.ф.-м.н., профессор ______ В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2020

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы.

Развитие теории p–колец, порождаемых булевыми кольцами, в последнее время тесно связано с их приложениями в медицине при решении проблем диагностики, в генетике, социальных науках, экономике, а также в кибернетике, теории вычислимости и определения сложности вычислений. Очевидна также их связь с такими математическими теориями как полугруппы, полумодули, комбинаторика, теорией конечных недетерминированных автоматов. Многие дискретные модели, возникающие в технике, физике, химии и геологии, построены с помощью таких алгебр. Булевы алгебры и булевы кольца применимы и в теории графов. Очевидна также их связь с математической логикой и бинарными отношениями. Все это подтверждает актуальность представленной темы квалификационной работы.

Цели работы.

1) изучить p-кольца, в частности рассмотреть случай при $p = 2$, более известный, как булево кольцо, и $p = 3$;

2) исследовать теорему Фостера-Земмера, которая утверждает, что каждое p-кольцо однозначно определяется простым числом p и булевым кольцом идемпотентов;

3) ввести понятия функций расстояния, площади на фигурах, а также рассмотреть свойтва этих функций;

4) изучить понятия линий, окружности и привести конкретный пример слабой линии;

5) применяя теорему Фостера-Земмера, составить таблицы для операций сложения и умножения в 3-кольце;

6) написать программу на языке программирования, которая для двух-, трёх- и четырёх- элементной булевой алгебры находит и выписывает попарно-ортогональные и идемпотентные элементы;

Описание структуры работы.

Данная магистерская работа состоит из введения, 10 параграфов и заключения. В конце приводится список литературы, состоящий из 21 наименования.

Краткая характеристика материалов работы.

В данной работе рассматривается p–кольца. Главным образом работа посвящена изучению 3-кольца, которое представляет собой «плоскость», точки которой представлены упорядоченными парами попарно ортогональных элементов некоторой булевой алгебры. Устанавливается, что в случае 3-колец может быть введена булевозначная функция расстояния между парами точек 3-кольца. Эта функция определяется единственным образом. Это позволяет говорить о геометрии p–колец. Также в работе вводится функция площади на фигурах в 3-кольце, как булева функция с тремя аргументами. С помощью функции площади далее вводятся понятия линий и окружности.

Научная новизна и значимость работы.

Научная значимость состоит в получении конкретных формул для вычисления функций расстояний и площадей фигур в плоскости 3-кольца, а также в проверке утверждения Фостера, что алгебра идемпотентов 3-кольца изоморфна булевой алгебре, над которой это кольцо построено, с помощью компьюетрной программы на языке программирования.

Положения, выносимые на защиту.

1. Классификация p–колец. Приводится подробное доказательство основной структурной теоремы.

2. Приведены примеры, представляющие 3-кольца над различными конечными булевыми алгебрами.

3. Введение метрики в плоскости p–кольца. В качестве примеров приводятся вычисления расстояний между точками в плоскости 3-кольца над 2-х элементной булевой алгеброй.

4. Главным результатом изучения свойств прямых и окружностей в метрической плоскости 3-кольца является следующая теорема:

Теорема 9.2 . Следующие условия эквиваленты для подмножества $L \subseteq R$: 1.L – линия;

2. L является слабой линией, для которой любая пара источников P, Q удовлетворяет $d(P, Q) = 1$;

3. L является и слабой линией, и окружностью;

4. L является и слабой линией, и окружностью радиуса 1;

5. L содержит две точки P и Q, такие что $d(P,Q) = 1$ и является максимальной с тем свойством, что $\alpha(X,Y,Z) = 0$ для любых $\forall X,Y,Z \in L$;

6. L – булево подмножество R , максимальное со свойством $\alpha(X,Y,Z) = 0$ для любых $\forall X,Y,Z \in L$;

7. L есть множество решений уравнений вида: (4.1) $ax_1 + bx_2 = ab$, где a, b – константы из B, удовлетворяющие следующему условию: (4.5) $a \cup b = 1$.

Основное содержание работы.

Раздел 1. Булевы алгебры, булевы кольца и их обобщения

Определение 1. Булевым кольцом назовём ассоциативное кольцо R с единицей, все элементы которого идемпотентны, то есть $x^2 = x$ для любого $x \in R$ [1].

Определение 2. *Булевой алгеброй* называется система $(B, \cup, \cap, ', 0, 1)$ с множеством(носителем) B, двумя бинарными операциями $\cup : B \times B \to B, \cap : B \times B \to B$, унарной операцией $' : B \to B$ и двумя элементами 0 и 1 $(0 \neq 1)$ из B такими, что для любых $a, b, c \in B$ из множества B верны следующие аксиомы:

1.1) $a \cap b = b \cap a$;

1.2) $a \cup b = b \cup a$;

2.1) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$;

2.2) $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$;

3.1) $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$;

3.2) $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$;

4.1) $a \cup (a \cap b) = a$;

4.2) $a \cap (a \cup b) = a$;

5.1) $a \cup 1 = 1$;

5.2) $a \cap 0 = 0$;

6.1) $a \cup a' = 1$;

6.2) $a \cap a' = 0$,

где $\cup$ – объединение, $\cap$ – пересечение, $'$ – дополнение [2].

Коммутативное кольцо с единицей называется p–кольцом, если для всех элементов x выполняются следующие условия: $x^p = x, px = 0$, где p- простое число [3].

Раздел 2. Связь булевых алгебр с булевыми кольцами

Булевы кольца — это кольцевой вариант булевых алгебр, так как выполняется следующая теорема [4]:

Теорема 1. Любая булева алгебра является булевым кольцом с единицей относительно операций сложения и умножения, определяемых правилами:

а.$a + b = |a - b| = (a \cap b\prime) \cup (b \cap a\prime)$,

б.$a \cdot b = a \cap b$,

где нуль и единица кольца совпадает с нулём и единицей алгебры. Однако верно и обратное: любое булево кольцо с единицей есть булева алгебра относительно операций:

в. $a \cup b = a + b - ab$,

г. $a \cap b = a - b$,

д. $a\prime = 1 + a$.

В обоих случаях алгебраические нуль и единица совпадают с булевыми нулём и единицей соответственно. [5].

Раздел 3. Теорема о представлении p-кольца.

3-ий параграф посвящен классификационной теореме Фостера–Земмера о p- кольцах и ее следствия, главное из которых гласит, что любой элемент р–кольца это вектор, компоненты которого являются ортогональные элементы некоторой булевой алгебры:

Теорема 2. Пусть B — булево кольцо, p — фиксированное простое число, R^* —множество всех $(p-1)$-наборов попарно ортогональных элементов из B. Если сложение элементов из R^* определяется как

$$(a_1, a_2, ..., a_{p-1}) + (b_1, b_2, ..., b_{p-1}) = (c_1, c_2, ..., c_{p-1}),$$

где $c_i = \sum_{j=0}^{p-1} a_j b_{i-j}$, $a_0 = 1 + \sum_{j=1}^{p-1} a_j$, $b_0 = 1 + \sum_{j=1}^{p-1} b_j$, целые i, j приведены по $modp$, а умножение элементов из R^* определяется как

$$(a_1, a_2, ..., a_{p-1})(b_1, b_2, ..., b_{p-1}) = (d_1, d_2, ..., d_{p-1}),$$

где $d_i = \sum_{j=1}^{p-1} a_j b_{j^{-1}i}$, j^{-1} является наименьшим целым числом по $modp$, удовлетворяющее $jx \equiv 1(modp)$.

Тогда R^* есть p–кольцо, булево кольцо идемпотентов которого изоморфно булеву кольцу B. Кроме того, каждое p–кольцо изоморфно p–кольцу такого типа. [6]

Теорема Фостера даёт вид элементов, построенных из идемпотентов некоторого кольца.

Следствие 1. Каждый элемент, принадлежащий p-кольцу, может быть представлен в виде $a = a_1 + 2a_2 + ... + (p-1)a_{p-1}$, где $2, ..., p-1$ – последовательные слагаемые 1, а a_i – попарно ортогональные идемпотенты.

Раздел 4. Пример 3-кольца.

Пусть $(B, +, \cdot, 0, 1)$ — булево кольцо с нулем и единицей. Построим $R_3 = \{X = (x_1, x_2) | x_1, x_2 \in B, x_1 x_2 = 0\}$ — множество с заданными операциями $(+)$ и $(\cdot)$, которые определяются следующим образом, используя формулы теоремы 2:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2, a_2 + b_2 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_1);$$

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1 + a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$$

Здесь $+(\cdot)$ в правых частях обозначает сложение (умножение) булевого кольца, а в левых — сложение (умножение) в R. $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$ обозначают элементы из B^2.

Теорема 3. Построенное множество R_3 есть 3-кольцо.

Пусть $(B, +, \cdot, 0, 1)$ — булево кольцо с нулем и единицей. Построим $R_3 = \{X = (x_1, x_2) | x_1, x_2 \in B, x_1 x_2 = 0\}$ — множество с заданными операциями $(+)$ и $(\cdot)$, которые определяются следующим образом, используя формулы теоремы 2:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2, a_2 + b_2 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_1);$$

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1 + a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$$

Здесь $+(\cdot)$ в правых частях обозначает сложение (умножение) булевого кольца, а в левых — сложение (умножение) в R. $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$ обозначают элементы из B^2.

Теорема 4. Построенное множество R_3 есть 3-кольцо.

Раздел 5. Пример 3-кольца, построенного над булевой алгеброй $B_2 = \{0; 1\}$

Рассмотрим 3 набора попарно-ортогональных элементов из булева кольца B_2: $(0,0), (1,0), (0,1)$. Найдём идемпотенты среди них.

1. В случае $(0,0)$ выполнение свойства идемпотентности очевидно, так как $(0,0)(0,0) = (0,0)$.

2. Убедимся в справедливости равенства $(1,0)(1,0) = (1,0)$.

$(1,0)(1,0) = (1 \cdot 1 + 0 \cdot 0, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (1 + 0, 0 + 0) = (1,0)$.

Таким образом, $(1,0)$ - идемпотент.

3. Убедимся в справедливости неравенства $(0,1)(0,1) \neq (0,1)$.

$(0 \cdot 0 + 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (0 + 1, 0 + 0) = (1,0)$.

Следовательно, $(0,1)(0,1) \neq (0,1)$, а значит, что он не является идемпотентом.

Очевидно, пара $(0,0)$ есть ноль построенного 3-кольца, $(0,1)$ – единица этого кольца.

Следовательно, построенное множество есть 3-кольцо и его идемпотенты $(0,0), (1,0)$ относительно сложения и умножения соответственно.

Раздел 6. Булевы функции

В 6 параграфе рассматриваются булевы функции:

Пусть задано множество B_2. Рассмотрим отображение $f : B^n \to B$, где n – натуральное число, а B^n обозначает декартово произведение множества B на себя n раз.

Определение 3. Булева функция f от n переменных над булевой алгеброй $\langle B, \cup, \cap, ', 0, 1\rangle$ определяется следующим образом:

1) $\forall a \in B$ постоянная функция $f_a : B^n \to B$, определяющаяся

$$f_a(x_1, ..., x_n) = a \qquad (\forall x_1, ..., x_n \in B), \tag{1}$$

является булевой функцией n переменных;

2) $\forall i = \overline{1,n}$ проектирующая функция $\varepsilon_i : B^n \to B$, определяющаяся

$$\varepsilon_i(x_1, ..., x_n) = x_i, \qquad (\forall x_1, ..., x_n \in B), \tag{2}$$

является булевой функцией n переменных;

3) Если $f, g : B^n \to B$ – булевы функции от n переменных, тогда функции $f \cup g, f \cap g, f' : B^n \to B$, определяющиеся как

$$(f \cup g)(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) \cup g(x_1, ..., x_n) \qquad (\forall x_1, ..., x_n \in B), \tag{3}$$

$$(f \cap g)(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) \cap g(x_1, ..., x_n) \qquad (\forall x_1, ..., x_n \in B), \tag{4}$$

$$f'(x_1, ..., x_n) = (f(x_1, ..., x_n))' \qquad (\forall x_1, ..., x_n \in B), \tag{5}$$

являются булевыми функциями n переменных;

4) Любая булева функция n переменных получается применением правил 1), 2) и 3) конечное число раз [7].

Также приводится теорема Мюллера–Левенхейма, которая утверждает, что две булевы функции совпадают тогда и только тогда, когда они идентичны по всем элементарным векторам:

Лемма 1. Две булевых функции f, g совпадают на R^n тогда и только тогда, когда они эквивалентны всем векторам из R^n.

Раздел 7. Функции расстояния

При рассмотрении 3-колец может быть введена булевозначная функция расстояния между парами точек 3-кольца.

Определение 4. Отображение $d : S^2 \to B$ есть функция расстояния пространства S, для которой выполняются следующие аксиомы расстояния $\forall X, Y, Z \in S$:

D1) $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$,

D2) $d(X, Y) = d(Y, X)$,

D3) $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$;

Лемма 2. Расстояние между двумя различными элементарными векторами $A, B \in \{0, 1\}^2$ есть 1 [8].

Таким функциям посвящён параграф 7, где также приведена формула расстояния в случае 3-кольца, которая может быть записана следующим единственным образом (формула 7.2):

$$d(X, Y) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

Раздел 8. Функции площади

Даны три точки $X, Y, Z \in S$ и положим $d(Y, Z) = d_1$,$d(X, Z) = d_2$, $d(X, Y) = d_3$. Необходимо найти такую функцию площади, что $\alpha : S^3 \to B$. Рассмотрим следующие 4 аксиомы площади:

A1) Булева функция $a : B^3 \to B$ такая, что $\alpha(X, Y, Z) = a(d_1, d_2, d_3) \quad \forall$ точек $X, Y, Z \in S$;

A2) $a(0, d_2, d_3) = a(d_1, 0, d_3) = a(d_1, d_2, 0) = 0$;

A3) a – симметрична в d_1, d_2, d_3;

A4) $a(1, 1, 1) = 1$.

Необходимо отметить, что $\forall k \in B \; \exists X, Y \in S$ такие, что $d(X, Y) = k$. Пусть $X = (k, 0)$ и $Y = (0, 0)$, значит $a(d_1, d_2, d_3)$ определена на B^3. Также заметим, что из пункта A1 вытекает следующее свойство:

$$d(X_i, X_j) = d(Y_i, Y_j) \quad (i, j = 1, 2, 3) \Rightarrow \alpha(X_1, X_2, X_3) = \alpha(Y_1, Y_2, Y_3). \qquad (6)$$

В случае 3-кольца получена её координатная формула : $\alpha(X, Y, Z) = y_1 z_2 + y_2 z_1 + x_1 z_2 + x_2 z_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1$, показывающая аналогию с площадью параллелограмма в случае аналитической евклидовой геометрии.

Раздел 9. Линейная геометрия

В 9 параграфе вводится понятия линий, слабых линий. Получены булевокольцевые уравнения этих линий.

Определение 5. Пусть P, Q – точки из 3-кольца R. Множество вида

$$l(P, Q) = \{X \in R_3 | \alpha(P, Q, X) = 0\},$$

назовём слабой линией, проходящей через точки P и Q, а точки P и Q, порождают линию $l(P, Q)$.

Предложение 1. Подмножество пространства 3-кольца R является слабой линией тогда и только тогда, когда оно является множеством решений уравнения вида

$$ax_1 + bx_2 = ab \quad \forall a, b \in B. \tag{7}$$

Точки P, Q слабой линии 7 порождают её тогда и только тогда, когда

$$p_1 + q_1 = b, p_2 + q_2 = a. \tag{8}$$

Здесь же вводится понятие окружности и предложение, характеризующее, в каком случае точки располагаются на окружности:

Определение 6. Пусть даны точка $C \in R$ и элемент $r \in B$. Тогда окружность с центром в точке C и радиусом r есть множество

$$C(r) = \{X \in R | d(C, X) = r\}.$$

Предложение 2. Если точки X, Y, Z расположены на окружности, то $\alpha(X, Y, Z) = 0$.

Определение 7. Линией пространства 3-кольца R называется такая слабая линия, у которой точки её порождающие P, Q, удовлетворяют условию $d(P, Q) = 1$.

Раздел 10. Практическая часть работы

10 параграф посвящён практической части, в котором приведены вычисления необходимых значений для того, чтобы получить таблицы сложения и умножения в 3-кольце.

Главной задачей работы является доказательство структурной теоремы для p–колец, введение основных метрических функций на плоскости 3-кольца над конкретными конечными булевыми алгебрами. Кроме того на языке программирования $C\#$ была разработана программа, которая подтверждает правильность приведённых вычислений. Данная программа среди всех наборов элементов находит попарно-ортогональные и идемпотентные элементы.

Также был рассмотрен пример слабой линии $l(P,Q) = \{X \in R_3 | \alpha(P,Q,X) = 0\}$, где $P(p_1,p_2), Q(q_1,q_2)$ – точки из 3-кольца R.

Исходя из выбранных точек a_4, a_8, имеем:

$$(0,1)+(0,0)=(0,1)=b, (1,0)+(0,1)=(0,0)=a.$$

Тогда уравнение слабой линии примет вид:

$$(0,0)x_1+(1,1)x_2=(0,0).$$

Выясним, какие точки принадлежат данной слабой линии.

$$1)(0,0)(0,0)+(1,1)(0,0)=(0,0);$$
$$2)(0,0)(1,0)+(1,1)(0,0)=(0,0);$$
$$3)(0,0)(1,0)+(1,1)(0,1)=(0,1);$$
$$4)(0,0)(0,1)+(1,1)(0,0)=(0,0);$$
$$5)(0,0)(0,1)+(1,1)(1,0)=(1,0);$$
$$6)(0,0)(1,1)+(1,1)(0,0)=(0,0);$$
$$7)(0,0)(0,0)+(1,1)(1,1)=(1,1);$$
$$8)(0,0)(0,0)+(1,1)(1,0)=(1,0);$$
$$9)(0,0)(0,0)+(1,1)(0,1)=(0,1).$$

Таким образом, из полученных результатов, можно заметить, что точки a_0, a_1, a_3, a_5 принадлежат слабой линии $l((01,10),(00,01))$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа была посвящена изучению 3-кольца. В ходе выполнения работы был установлен факт, что в случае 3-колец может быть введена булевозначная функция расстояния между парами точек 3-кольца. Как следствие из этих понятий возникло понятие окружности в плоскости p–кольца. В работе была введена функция площади на фигурах в 3-кольце, как булева функция с тремя аргументами, то есть определенной на тройке точек из 3-кольца.

В данной магистерской работе изучались свойства функций расстояний и площадей фигур. Были получены конкретные формулы для их вычисления. Кроме того, используя эти формулы, были построены таблицы сложения и умножения, а также приведён пример слабой линии. С помощью компьютерной программы было проверено утверждения Фостера, что алгебра идемпотентов 3-кольца изоморфна булевой алгебре, над которой это кольцо построено, с помощью компьюетрной программы на языке программирования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Маккой, Н. Н. Кольца и идеалы, 1948.

2. Поплавский В.Б. О разложении определителей булевых матриц // Фундамент. и прикл. матем. 2007, т. 13, вып. 4, С. 199-223.

3. Stone, M. H. The theory of representations for Boolean algebras, Trans. Amer. Math. Soc, 40,1936, 37–111.

4. Zemmer, J. L. Some remarks on p-rings and their boolean geometry,Pacific J. Math. 6,1956, 193-208.

5. Сикорский, Р. Булевы алгебры. Москва: Мир, 1969. 376с.

6. Foster, A. L. P–rings and their Boole an–vector representation, Acta Math., 84, 1951, 231–261.

7. S.Rudeanu, Boolean Functions and Equations. North-Holland Publ. Co., Amsterdam-London, 1974.

8. Theory and applications of distance geometry, The Clarendon Press. Oxford, 1953.