

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**Исследование скорости диффузии в фазовом пространстве
отображений**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 411 группы
направления (специальности) 03.03.01 «ПРИКЛАДНЫЕ МАТЕМАТИКА И
ФИЗИКА»

факультета нелинейных процессов

Дворцова Александра Алексеевича

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент

_____ А.В. Савин

дата, подпись

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент

_____ Е.Н. Бегинин

дата, подпись

Саратов 2020 год

Содержание

Введение	3
Основное содержание работы	6
Заключение	13
Список использованной литературы	14

Введение

Как известно, подавляющее большинство реальных физических систем математически могут быть описаны при помощи соответствующих динамических систем. То есть их можно охарактеризовать набором величин, называемых динамическими переменными, соответствующих состоянию системы в данный момент времени, а также оператором эволюции системы, позволяющим однозначно получать значения динамических переменных в последующие моменты времени по определённому правилу, исходя из текущих значений [1]. Особый интерес представляют такие системы, в которых малое изменение начальных значений с течением времени будет приводить к значительным изменениям состояния, и при этом все состояния, проходимые системой, будут находиться в ограниченной области фазового пространства. Таким образом, малое облако начальных условий с течением времени будет «расплываться» по всему фазовому объёму, а значит динамику заданного с конечной точностью состояния системы, в конце концов, нельзя будет предсказать. А возможность предсказывать события является одним из самых значимых достоинств в научном подходе к изучению мира, что обуславливает, с этой фундаментальной точки зрения, высокую актуальность изучения таких систем и перехода к подобной динамике. Такое поведение называется хаотическим [2].

В этом случае отслеживание поведения одной траектории не позволяет получить информацию о поведении системы в целом. Одним из направлений исследования в таком случае становится анализ динамики ансамбля начальных условий. В случае хаотического режима в консервативных системах его динамика в первом приближении может быть описана моделью случайных блужданий [3], в связи с чем стало традиционным использование термина "диффузия" для описания этого процесса. При более аккуратном анализе оказывается, однако, что процесс диффузии точки в фазовом пространстве значительно более сложен, чем "простое" случайное

блуждание. Поэтому исследование диффузии является одной из важных задач нелинейной динамики консервативных систем.

Также динамические системы подразделяются на консервативные (гамильтоновы) и диссипативные. Консервативными называют такие системы, в которых произвольно взятый фазовый объём с течением времени сохраняется, хотя может изменять форму. Диссипативными в теории динамических систем называют системы, для которых выполняется противоположное утверждение, но зачастую подразумевается, что фазовый объём будет со временем уменьшаться. Важным отличием диссипативных систем является, то, что в системе, предоставленной самой себе в течение долгого времени, установившийся режим динамики, не будет зависеть от начальных условий. То есть в системе будет существовать аттрактор.

Одним из простейших для изучения и, тем не менее, сохраняющих большинство характерных эффектов, связанных с хаотическим поведением, видов динамических систем является дискретное отображение. Причём одним из наиболее изучаемых отображений, в которых наблюдается динамический хаос, является стандартное отображение (также отображение Чирикова-Тейлора) [4]. Это отображение получило множество применений, как в теоретических исследованиях (сепаратрисное отображение [5], нелинейный резонанс [6]), так и применительно к реальным задачам (ограничение заряженных частиц в магнитных ловушках [7], движение комет в солнечной системе [8], микроволновая ионизация Ридберговских атомов [9], электронный магнитотранспорт в резонансном туннельном диоде [10], движения заряженных частиц в ускорителях [11] и др.). Однако простейший пример физической системы, для которой можно получить стандартное отображение – ротатор под воздействием внешних ударов..

Для более детального изучения хаотического поведения в данной работе рассматривается диффузия траекторий в фазовом пространстве таких консервативных систем, как стандартное отображение и отображение-

паутина. Также в стандартное отображение вводится диссипация, и наблюдаются, возникающие в связи с этим эффекты.

Целями настоящей работы являются:

1. Построить карту диффузии стандартного отображения и пронаблюдать его эволюцию при изменении управляющего параметра.
2. Вывести отображения, которое бы описывало стандартное отображение с затуханием.
3. Построить карту диффузии для стандартного отображения с затуханием и пронаблюдать его эволюцию при изменении параметра затухания.
4. Построить карту диффузии для отображения-паутины и посмотреть как она будет изменяться с изменением управляющего параметра.
5. Изучить зависимость скорости убегания в отображении-паутине от дистанции убегания.

По результатам данной работы имеется 2 публикации:

1. Дворцов А.А., Савин А.В. Иллюстрации скорости диффузии в фазовом пространстве стандартного отображения. // Материалы XII Международной школы-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур” (ХАОС-2019), 1–6 октября 2019, Саратов. Саратов: ООО “Издательский центр “Наука”, с. 102.
2. Дворцов А.А., Савин А.В. Иллюстрации скорости диффузии в фазовом пространстве стандартного отображения // «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: сборник трудов XIV Всерос. Конф. Молодых ученых. Саратов: Изд-во “Техно-Декор”, с. 150-151.

Основное содержание работы

В первой части работы рассматривается стандартное отображение (1).

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_n) \\ x_{n+1} = x_n + p_{n+1} \mod 1 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь параметр K характеризует интенсивность периодического внешнего импульсного воздействия. Как известно [12], начиная с некоего критического значения $K^* \approx 0.97$ разрушаются все инвариантные КАМ-торы (рис. 1), которые, очевидным образом, существовали ещё при $K=0$, когда система была интегрируема, и сохранились вследствие малости неинтегрируемого возмущения. Это открывает возможность диффузии точки в радиальном направлении.

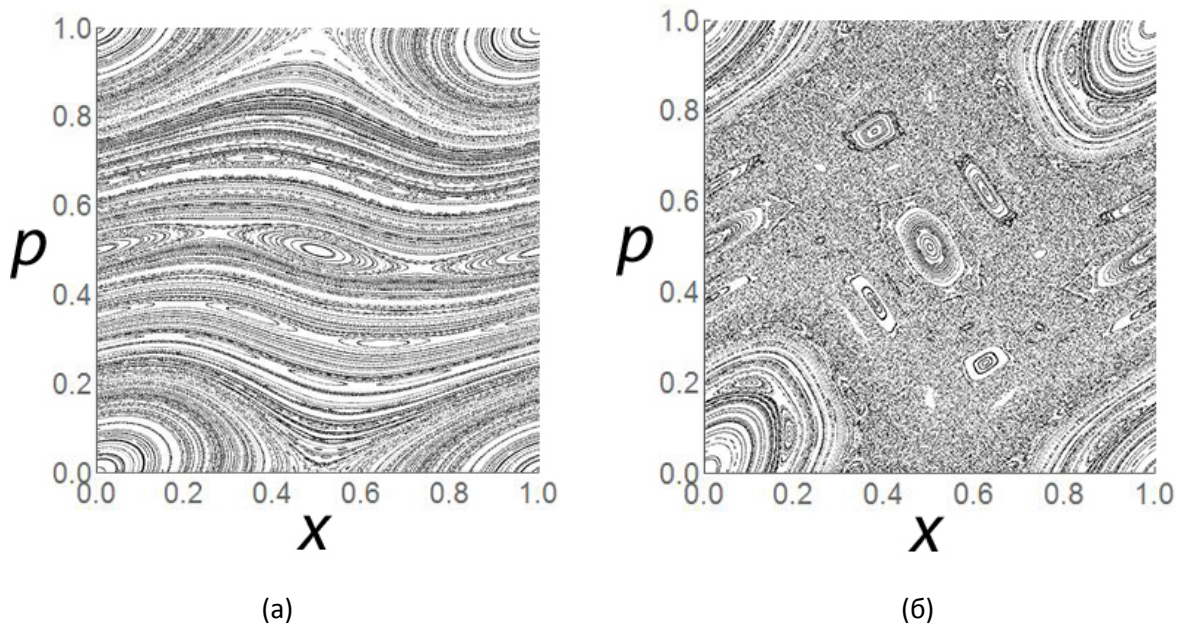


Рис. 1. Фазовые портреты стандартного отображения при $K = 0,5$ (а) и $K = 1,2$ (б)

На рисунке 1б большую часть фазового пространства покрывает так называемое стохастическое море, в котором точки могут свободно диффундировать, но также присутствуют и островки устойчивости, границы которых имеют сложную фрактальную структуру.

Далее в работе построены карты диффузии и соответствующие им фазовые портреты (рис. 2). Для построения карт диффузии в каждом пикселе на рисунке взято по 100 точек, для всех посчитаны количества итераций

отображения достаточных для изменения координаты p на 1, а затем проведено усреднение. Если количество шагов меньше некоторого, наперёд заданного, числа N_{min} , то пиксель покрашен чёрным, больше N_{max} – белым. В остальных случаях пиксель окрашен в оттенок серого таким образом, чтобы яркость линейно менялась от чёрного до белого, при соответствующем изменении количества шагов убегания от N_{min} до N_{max} . Числа N_{min} и N_{max} выбираются таким образом, чтобы в промежуток от N_{min} до N_{max} попадало не менее 90% всех «убегающих» точек.

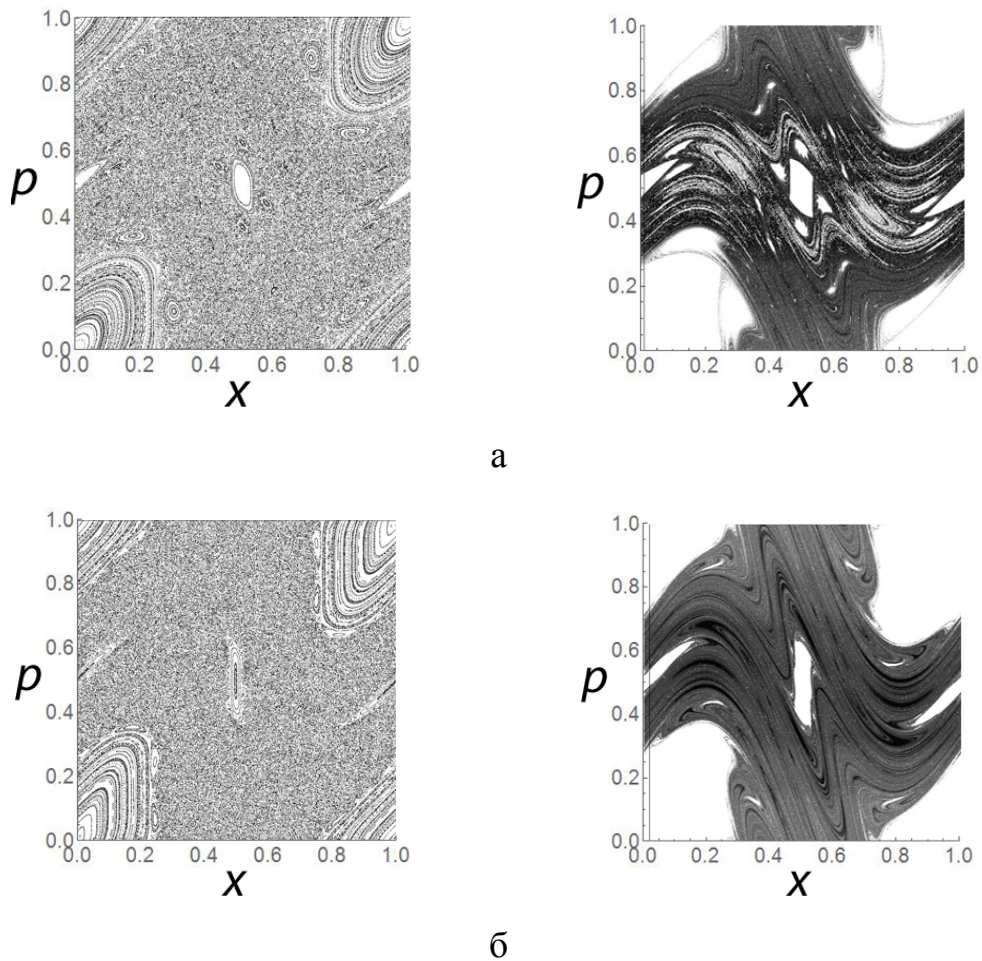


Рис. 2. Фазовые портреты (слева) и карты диффузии (справа) при разных параметрах. а) $K = 1,6$; $N_{min} = 300$; $N_{max} = 1000$ б) $K = 2$; $N_{min} = 1$; $N_{max} = 300$

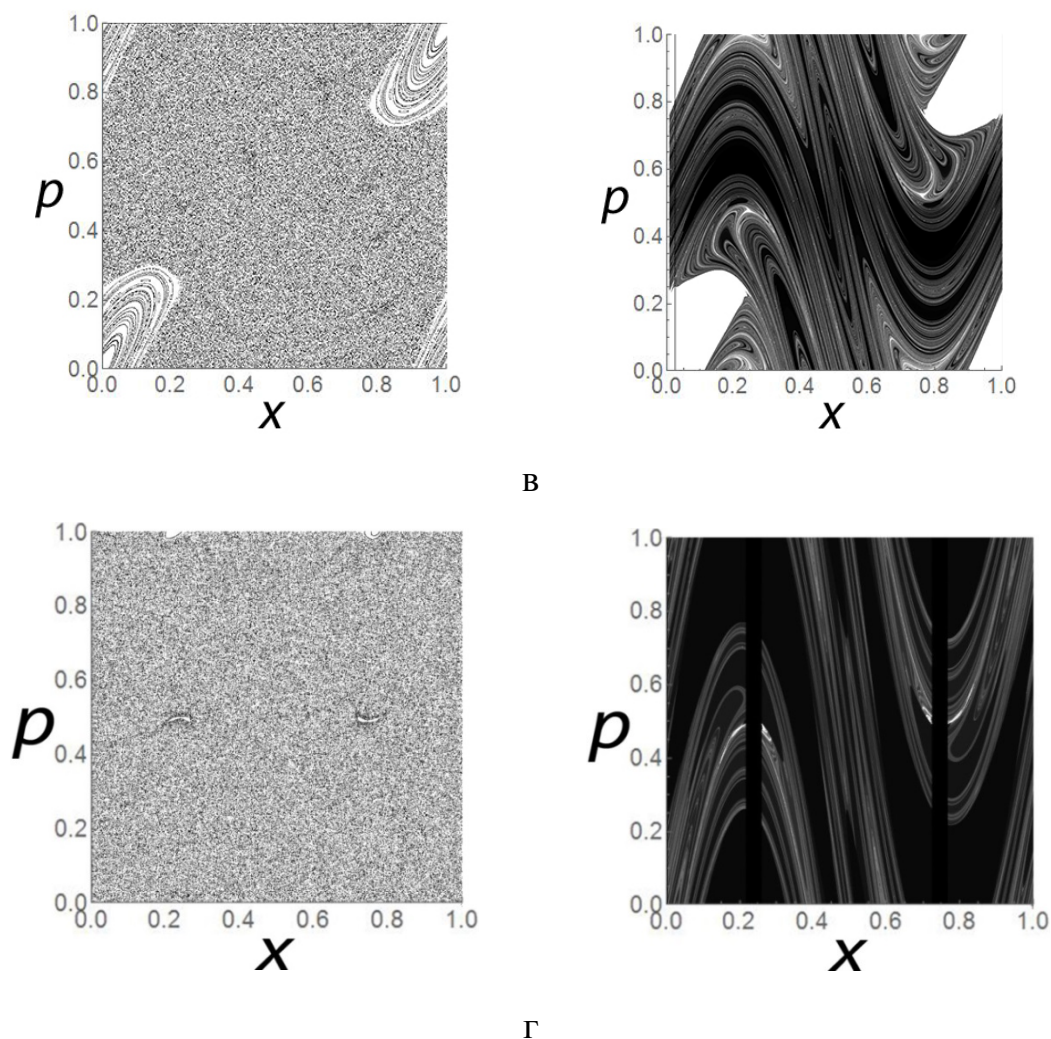


Рис. 2. Фазовые портреты (слева) и карты диффузии (справа) при разных параметрах в) $K = 3$; $N_{min} = 3$; $N_{max} = 93$ г) $K = 6,34$; $N_{min} = 1$; $N_{max} = 127$

Видно, что скорость убегания увеличивается с увеличением K , поскольку соответствующие N_{min} и N_{max} становятся всё больше и больше. Также сравнивая фазовые портреты и карты диффузии, можно заметить, что области с наименьшими скоростями убегания траекторий соответствуют окрестностям эллиптических неподвижных точек в фазовом пространстве. При увеличении параметра воздействия K вследствие уменьшения области, занимаемой эллиптическими кривыми, убегаящие траектории захватывают почти всё фазовое пространство.

Область же с наивысшими скоростями диффузии, как видно из рисунка 3, соответствует окрестности гиперболической неподвижной точки на фазовых портретах при меньших K .

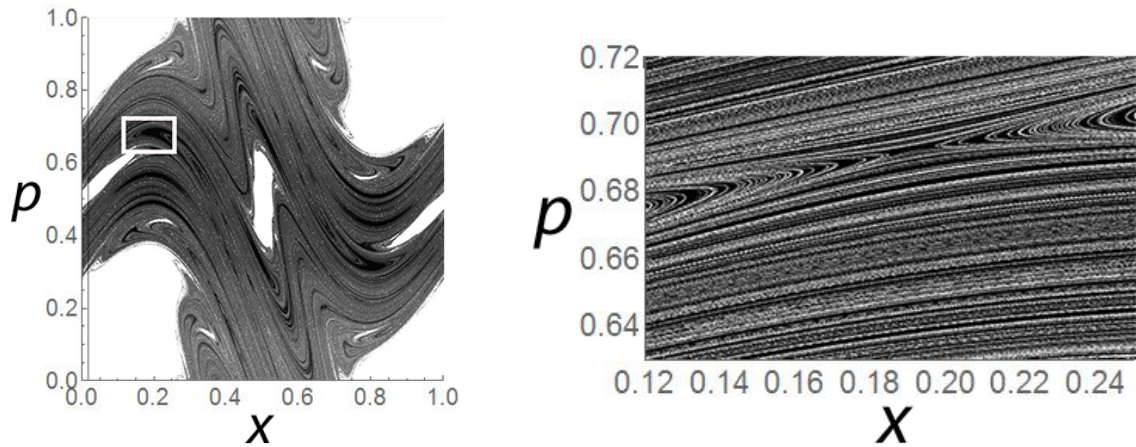


Рис. 3. Область на карте диффузии при $K = 2$ (слева) и соответствующая область на фазовом портрете при $K = 0.5$ (справа)

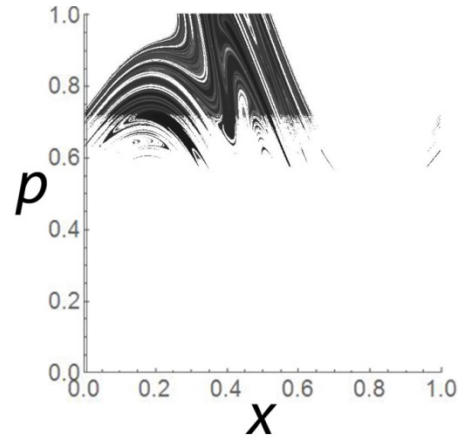
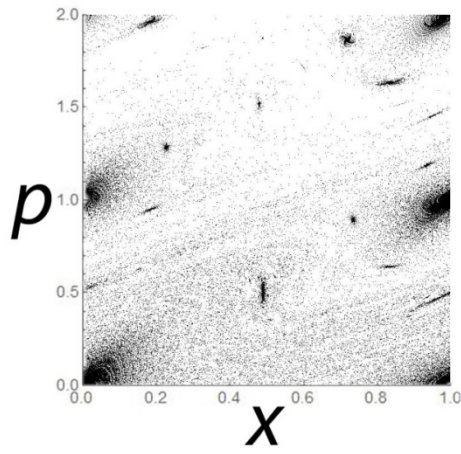
Далее в работе приведён вывод стандартного отображения с затуханием (2).

$$\begin{cases} p_{n+1} = \left(p_n - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_n)\right) e^{-\alpha T} \\ x_{n+1} = x_n + \left(p_n - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_n)\right) \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \mod 1 \end{cases} \quad (2)$$

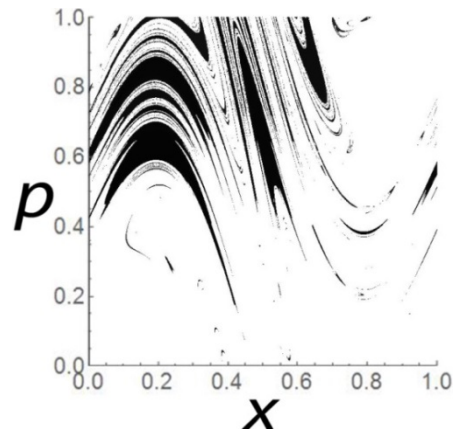
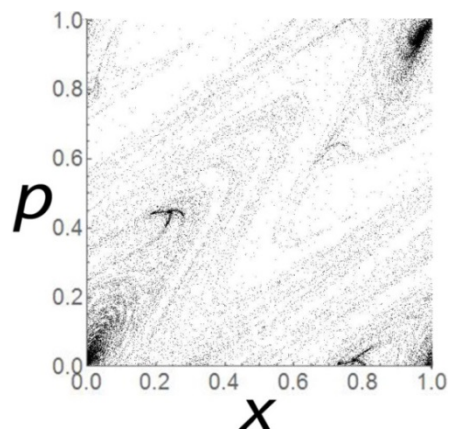
Рассмотрена трансформация фазовых портретов при изменении параметра диссипации α при разных значениях параметра K . А также построены соответствующие карты диффузии (Рис. 4)

Подсчитан параметр fillperc , определяющий процент убегающих траекторий в отображаемой области фазового пространства. Показано, что он убывает при увеличении параметра затухания.

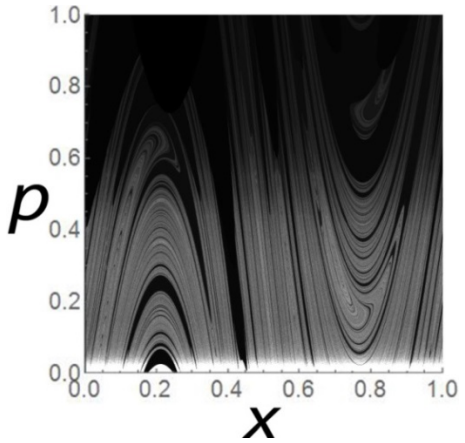
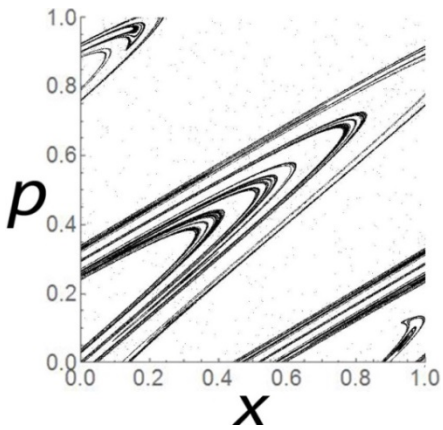
Показано, что диссипативная система ведёт себя по разному при разных значениях параметра K , однако при всех значениях скорость диффузии убегающих точек возрастает.



а



б



в

Рис.4. Фазовые портреты (слева) и карты диффузии (справа) для стандартного отображения с затуханием при а) $K=2$, $\alpha = 0.1$, $N_{min} = 1$, $N_{max} = 50$, $fillperc = 19.35\%$ б) $K=3$, $\alpha = 0.1$, $N_{min} = 1$, $N_{max} = 127$, $fillperc = 42.47\%$ в) $K=8$, $\alpha = 0.7$, $N_{min} = 1$, $N_{max} = 64$

Далее в работе рассматривается вырожденный случай - изохронная система под внешним воздействием отображение-паутина (3). В ней резонанс может наблюдаться одновременно во всём пространстве и при любой амплитуде внешнего воздействия, а сепаратрисы образуют сеть.

$$\begin{cases} u_{n+1} = (u_n - K_0 \sin(v_n)) \cos(\frac{2\pi}{q}) + v_n \sin(\frac{2\pi}{q}) \\ v_{n+1} = -(u_n - K_0 \sin(v_n)) \sin(\frac{2\pi}{q}) + v_n \cos(\frac{2\pi}{q}) \end{cases} \quad (3)$$

Построены карты диффузии при больших значениях параметра K_0 (рис. 5).

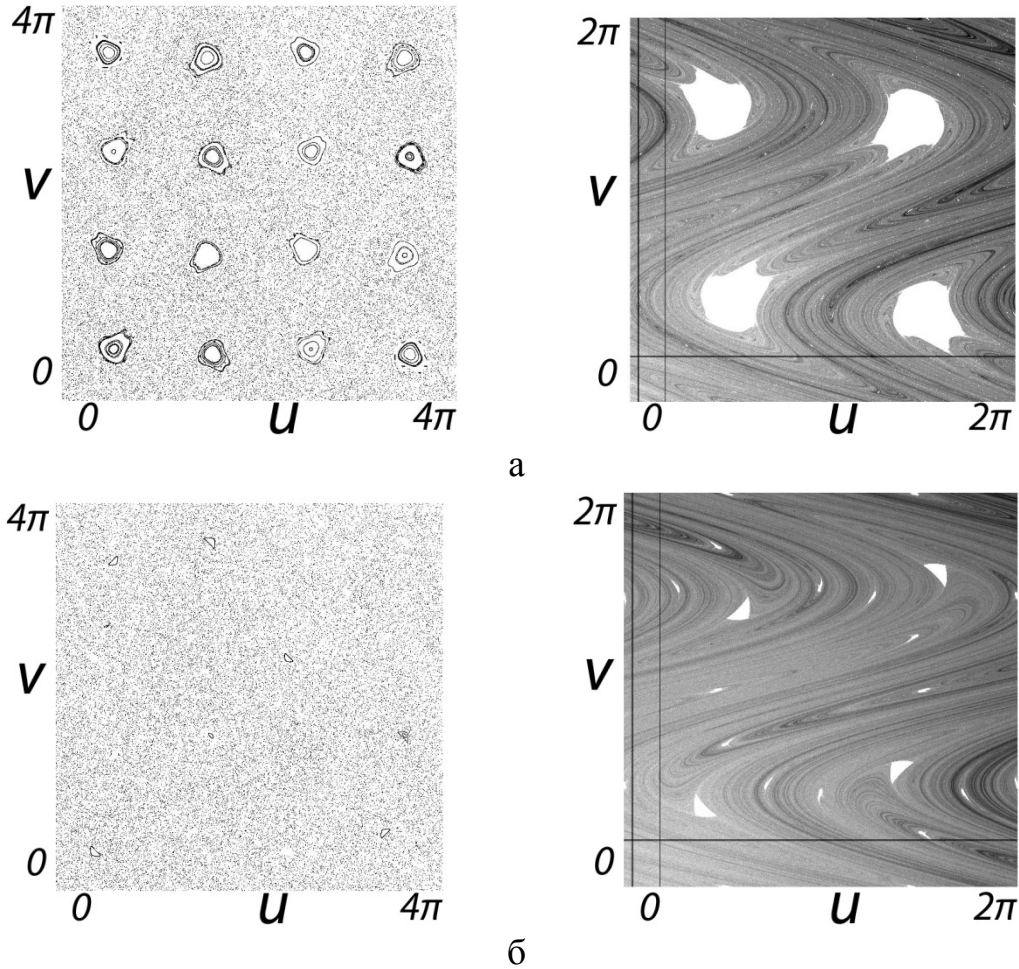


Рис.5 Фазовый портрет (слева) и карта диффузии (справа) для отображения-паутины, при а) $K_0 = 3$, $q = 4$, $N_{min}=1$, $N_{max}=300$, $dist = 8\pi$.
б) $K_0 = 4$, $q = 4$, $N_{min}=1$, $N_{max}=256$, $dist = 8\pi$.

При $K_0 = 1.5$ построена зависимость количества шагов убегания от дистанции (рис. 6). Зависимость имеет ступенчатый характер, при этом средняя ширина первых ступенек примерно совпадает с периодом решётки на фазовом портрете. Далее размеры ступенек начинают уменьшаться.

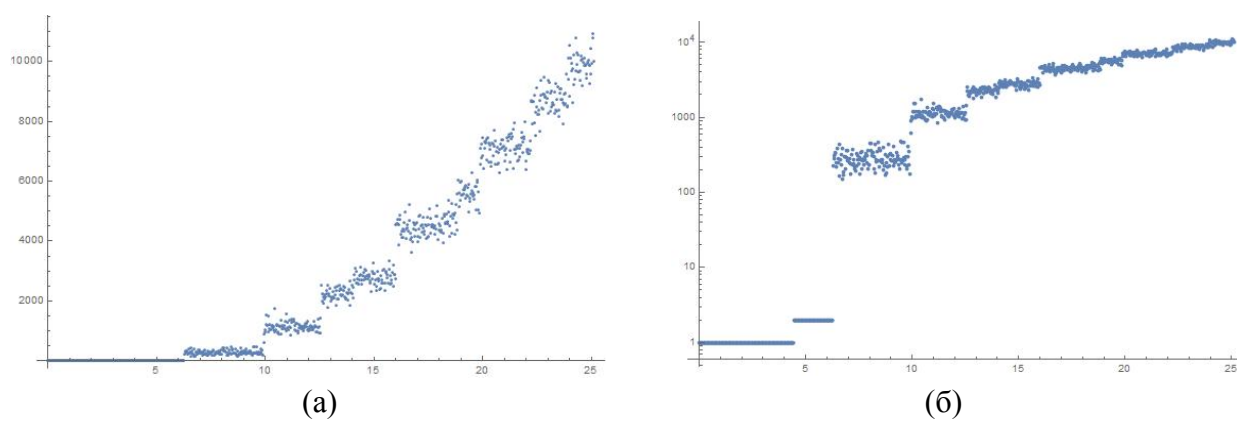


Рис. 6. Зависимость среднего количества шагов, необходимых для убегания точки на расстояние $dist$, в линейной (а) и логарифмической (б) шкалах.

Заключение

Таким образом, в данной работе была исследована диффузия в фазовом пространстве некоторых отображений. Для этого были построены карты диффузии для стандартного отображения и изучено то, как они трансформируются при увеличении параметра воздействия. Оказалось, что области неубегания на картах диффузии соответствуют окрестностям эллиптических неподвижных точек. Области же наибольшего убегания соответствуют областям, которые были окрестностями неподвижных гиперболических точек при меньшем значении параметра K , то есть до разрушения КАМ-торов. При увеличении параметра скорость диффузии заметно повышается, а области неубегания сокращаются.

Рассмотрена система с ротатором под воздействием внешних ударов в вязкой среде, для её описания выведено отображение. А также построены карты диффузии для последнего при различных значениях параметра затухания.

Оказалось, что при увеличении параметра затухания скорость диффузии возрастает, а количество убегających точек уменьшается.

Построены карты диффузии для отображения-паутины при больших значениях параметра K_0 . В них наблюдаются схожая структура и эффекты с картами диффузии стандартного отображения.

Для отображения-паутины построена зависимость среднего времени убегания от дистанции. Она имеет ступенчатый вид, причём ширина ступенек для малых дистанций убегания коррелирует с размером ячейки, а при больших значениях начинает уменьшаться.

Список использованной литературы

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006.
2. Д.И. Трубецков «Введение в синергетику. Колебания и волны». М.: URSS, 2012.
3. Райхл Л Е Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах М. - Ижевск: Институт компьютерных исследований 2008, 756 с.
4. *Заславский Г. М.*, Физика хаоса в гамильтоновых системах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
5. B.V.Chirikov, "A universal instability of many-dimensional oscillator systems", Phys. Rep. 52: 302 (1979)]
6. Б.В. Чириков Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Новосибирск.: Институт ядерной физики СОАН СССР, 1969, с. 32.
7. B.V.Chirikov, "Particle confinement and adiabatic invariance", Proc. R. Soc. Lond. A 413: 149 (1987)
8. T.Y.Petrosky, "Chaos and cometary clouds in the solar system", Phys. Lett. A 117(7): 330 (1986)
9. G.Casati, I.Guarneri, D.L.Shepelyansky, "Hydrogen atom in monochromatic field: chaos and dynamical photonic localization", IEEE J. of Quant. Elect. 24: 1425 (1988)
10. D.L.Shepelyansky, A.D.Stone, "Chaotic Landau level mixing in classical and quantum wells", Phys. Rev. Lett. 74: 2098 (1995)
11. F.M.Izraelev, "Nearly linear mappings and their applications", Physica D 1(3): 243 (1980)
12. J.M.Greene, "Method for determining a stochastic transition", J. Math. Phys. 20(6): 1188 (1979)