

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

Динамика системы "гофрированный волновод" с осциллирующей границей

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 411 группы
направления (специальности) 03.03.01 «ПРИКЛАДНЫЕ МАТЕМАТИКА И
ФИЗИКА»

Факультет нелинейных процессов

Любченко Дмитрий Олегович

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент _____ А.В. Савин
подпись, дата

Заведующий кафедрой

к.ф.-м.н., доцент _____ Е.Н. Бегинин
подпись, дата

Саратов 2020 год

Содержание

Введение	3
Основные результаты	5
Заключение	13
Список использованной литературы	14

Введение

Как известно, реальному процессу соответствует динамическая система, когда процесс описывается уравнениями, по которым, зная начальные условия, можно однозначно определить состояние системы в любой последующий момент времени [1]. Казалось бы, человеческая мечта о предсказывании будущего сводится к постановке в соответствие всем реальным процессам динамических систем и решению уравнений, описывающих их. Однако существуют системы, в которых при небольшом изменении начальных условий наш прогноз будет существенно меняться. В таком случае говорят о наличии динамического хаоса в системе. Ввиду того, что при попытке измерить ту или иную величину у нас всегда будет определенная погрешность, начальные данные будут иметь определённый разброс, который в хаотических системах будет расти со временем. Это означает, что ошибка в прогнозе увеличивается со временем. Именно поэтому исследование динамических систем и хаоса в них очень важно в современном мире.

Одним из типов динамических систем являются дискретные отображения. Их достаточно легко изучать, и с их помощью можно наблюдать широкий спектр явлений, присущих нелинейным системам [2-4]. Примером отображения с типичным для консервативной системы с двумя степенями свободы поведением является модель Теннисона – Либермана – Лихтенберга [5].

Широкое применение отображения получили для описания моделей с соударениями. Они представляют собой системы, в которых движется между двумя стенками, последовательно ударяясь и отскакивая от каждой из них. Одна из стенок при этом неподвижна, а другая может совершать колебания по заданному закону. Особенность таких моделей в том, что частицы, двигающиеся в них, могут ускоряться. Одну из таких моделей рассматривал Э. Ферми для объяснения происхождения быстрых частиц в космических лучах [6]. Модели с соударениями еще называют моделями бильярдного типа. В работе [7] исследовалась средняя по ансамблю скорость частиц в бильярде типа «стадион». В этой системе было обнаружено, что малые колебания границы приводят к тому, что в системе появляется граничное значение начальной скорости, ниже которой средняя скорость начинает падать. Если начальная скорость больше граничной, то частицы в среднем ускоряются. Данное явление назвали «бильярдным» демоном Максвелла. В работе [8] было предположено, что для возникновения ускорения Ферми в бильярде с осциллирующими границами достаточно, чтобы при фиксированной границе такой бильярд обладал хаотической динамикой.

Система, которая была рассмотрена в данной работе, является моделью с соударениями, в которой одна из стенок неподвижна, а другая стенка имеет гармоническую гофрировку и совершает колебания по гармоническому закону, что, по сути, является усовершенствованием модели Теннисона – Либермана – Лихтенберга с добавлением осцилляций стенки. При выводе уравнений также была учтена возможная потеря энергии при столкновении частицы с верхней стенкой. Это дает возможность исследовать систему в консервативном, слабо диссипативном и сильно диссипативном случаях. Существенным отличием диссипативных систем от консервативных является наличие у первых аттракторов. Системы со слабой диссипацией демонстрируют интересное поведение: они демонстрируют черты как консервативной, так и диссипативной динамики [9].

Целями настоящей работы являются:

1. Получение уравнений, описывающих модифицированную модель Теннисона – Либермана – Лихтенберга;
2. Исследование эволюции фазовых портретов при постепенном увеличении амплитуды колебаний стенки и постепенном введении диссипации;
3. Анализ динамики средней по ансамблю скорости при разных значениях параметров системы.

Основные результаты исследований были представлены на научно-практических конференциях: XII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур» 2019, XIV Всероссийской научной конференции молодых ученых «Нанoeлектроника, нанoфотоника и нелинейная физика» 2019, школе-конференции «Нелинейные дни для молодых в Саратове 2018, 2019», студенческой конференции факультета нелинейных процессов СГУ 2019.

По результатам данной работы имеется 2 публикации:

1. Любченко Д.О., Савин А.В. Динамика системы “гофрированный волновод” с осциллирующей границей // Материалы XII Международной школы-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур” (ХАОС-2019), 1–6 октября 2019, Саратов. Саратов: ООО “Издательский центр “Наука”, с. 102.
2. Любченко Д.О., Савин А.В. Динамика системы “гофрированный волновод” с осциллирующей границей // «Нанoeлектроника, нанoфотоника и нелинейная физика»: сборник трудов XIV Всерос. Конф. Молодых ученых. Саратов: Изд-во “Техно-Декор”, с. 150-151.

Основные результаты

В работе была рассмотрена система, в которой частица движется между двумя стенками последовательно упруго ударяясь о них, теряя часть скорости и отскакивая от каждой из них. Нижняя стенка неподвижна:

$$y_1 = 0; \quad (5)$$

а верхняя является гофрированной и может колебаться по гармоническому закону. Её уравнение можно записать:

$$y_1 = F(x, t) = b \cos kx + a \cos \omega t + h; \quad (4)$$

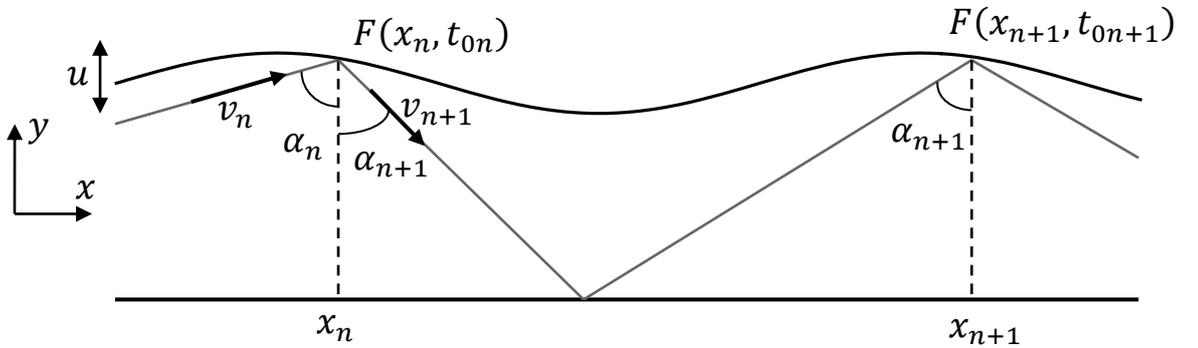


Рис. 1. Схематическая иллюстрация движения частицы между двумя стенками.

На рис. 1 обозначено: x_n – координата n -го соударения с верхней стенкой; α_n – угол между перпендикуляром, проведенным от нижней стенки до точки соударения, и вектором скорости v_n ; v_n – скорость частицы после $(n - 1)$ -го соударения о верхнюю стенку; t_{0n} – время, которое прошло с момента начала движения частицы до момента n -го удара о верхнюю стенку.

Для изучения динамики такой системы было получено четырехмерное отображение в случае слабой гофрировки и малой амплитуды колебаний стенки. С помощью замены переменных отображение можно свести к трехпараметрической системе:

$$\begin{aligned} \Omega_{n+1} &= \sqrt{\Omega_{n+1x}^2 + \Omega_{n+1y}^2}; \\ \alpha_{n+1} &= \arctan \left[\frac{\Omega_{nx}}{\Omega_{ny}} \right]; \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + A \frac{\Omega_{nx}}{\Omega_{ny}}; \\ \psi_{n+1} &= \psi_n + \frac{1}{\Omega_{ny}}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Omega_{n+1x} = \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right)\Omega_n \sin(\alpha_n + 2\gamma) + \frac{1}{2}\varepsilon\Omega_n \sin \alpha_n - 2\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right)\gamma u;$$

$$\Omega_{n+1y} = \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right)\Omega_n \cos(\alpha_n + 2\gamma) - \frac{1}{2}\varepsilon\Omega_n \cos \alpha_n - 2\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right)u;$$

Здесь $\gamma = -C \sin \varphi_n$, $u = -B \sin \psi_n$, Ω_n – безразмерная скорость, φ_n – безразмерная координата, ψ_n – безразмерное время, A – безразмерное расстояние между стенками, B – безразмерная амплитуда колебаний стенки, C – безразмерная амплитуда гофрировки стенки, ε – параметр диссипации.

Фазовые портреты строились в двух проекциях. Первая проекция отображает плоскость «координата-угол» ($\varphi; \alpha$), где φ пронормирована так, что $\varphi \in [-\pi; \pi]$. Вторая проекция отображает плоскость «скорость-время» ($\Omega; \psi$), где ψ пронормирована так, что $\psi \in [-\pi; \pi]$. Начальные условия $\varphi_0 = 1$, $\psi_0 = 4.14$, а все значения Ω_0 и α_0 заданы в таблице 1:

Таблица 1.

α_0	φ_0	Ω_0	ψ_0	Цвет траектории
0.06	0	1	4.14	красный
0.14	0	1	4.14	
0.25	0	1	4.14	
0.06	0	0.4	4.14	синий
0.14	0	0.4	4.14	
0.25	0	0.4	4.14	
0.06	0	5	4.14	зелёный
0.14	0	5	4.14	
0.25	0	5	4.14	

Для того, чтобы отличать траектории с разной начальной скоростью, они окрашивались в разный цвет в зависимости от Ω_0 . Для начала, были построены фазовые проекции при разных амплитудах колебаний верхней стенки $B = 0, 0.01, 0.1$ (рис. 2) в консервативном случае.

При отсутствии колебаний гофрированной стенки фазовыми траекториями являются двухчастотные торы (рис. 2.1). Если задать малое колебание данной стенке, то двухчастотные торы станут трехчастотными (рис. 2.2). Если увеличить амплитуду колебаний, то некоторые траектории, которые были регулярными, становятся хаотичными и начинается диффузия Арнольда (рис. 2.3).

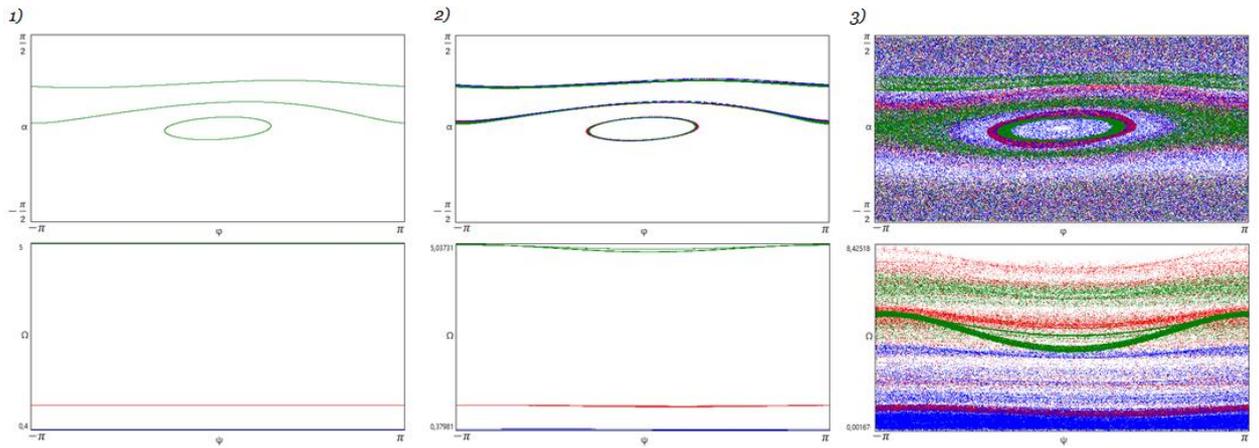


Рис. 2. Проекция фазового портрета системы (1) на плоскость $(\varphi; \alpha)$ (верхний рисунок) и на плоскость $(\Omega; \psi)$ (нижний рисунок) при параметрах: $A=2$; $C=0.05$; 1. $B=0$; 2. $B=0.01$; 3. $B=0.1$; $\varepsilon=0$; начальные условия заданы в таблица 1.

Поскольку в данной системе меняется скорость, было исследовано статистическое поведение скорости частиц. Для этого вычислялась средняя скорость по ансамблю из 4410 траекторий с различным начальным условиями, заданными в диапазонах $\varphi_0 \in [0; 3]$, $\psi_0 \in [1; 4]$, $\alpha_0 \in [0.35; 0.4]$, выбранными равномерно в хаотической области в виде решетки, для разной (одинаковой для каждой системе в ансамбле) начальной скорости Ω_0 . По вертикали отложена текущая среднюю скорость, а по горизонтали количество итераций. Цвет графика зависит от начальной скорости Ω_0 .

В случае слабой амплитуды колебаний ($B = 0.01$) существует некая критическая начальная скорость (рис. 3). Если у траектории начальная скорость ниже критической, то такие траектории будут иметь предельную скорость, к которой они все будут стремиться. Если начальная скорость выше критической, то скорость траектории будет иметь продолжительный рост. Похожее явление было продемонстрировано в работе [7] и оно носит название эффект «бильярдного» демона Максвелла.

В случае бóльшей амплитуды ($B = 0.1$) наблюдается нетривиальное поведение средней скорости (рис. 4): в системе появилась предельная скорость, к которой стремятся все траектории.

Поскольку, в зависимости от амплитуды, скорость ведёт себя по-разному, был построен график зависимости минимальной скорости в ансамбле, средней скорости, максимальной скорости в ансамбле через 2000000 итераций отображения от амплитуды колебания B при $C = 0.05$. Ансамбль задаётся из 1210 траекторий с различными начальными условиями, заданными в диапазонах $\varphi_0 \in [0; 3]$, $\psi_0 \in [1; 4]$, $\alpha_0 \in [0.35; 0.4]$, выбранными равномерно в хаотической области и начальной скоростью $\Omega_0 = 50$ для всех

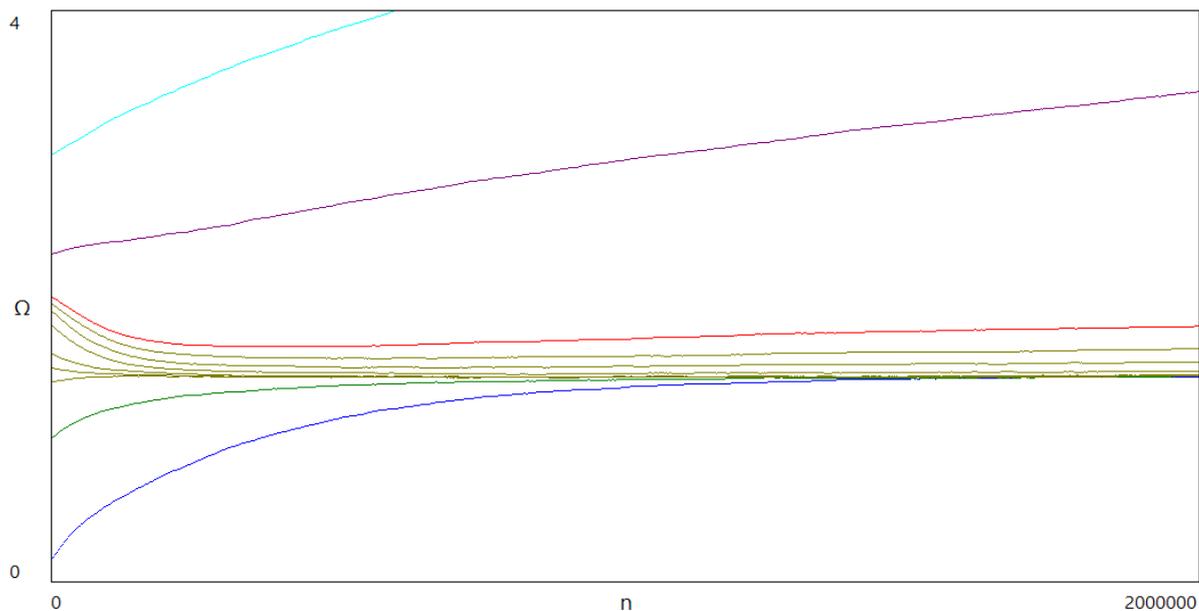


Рис. 3. Зависимость средней скорости от числа итераций ансамбля системы (1) с различными начальными $\varphi_0, \psi_0, \alpha_0$, заданными равномерно в хаотической области, при параметрах: $A=2$; $C=0.05$; $B=0.01$; $\varepsilon=0$; Цвет графика зависит от начальной скорости Ω_0 : синий – $\Omega_0=0.1$, зелёный – $\Omega_0=1$, красный – $\Omega_0=2$, фиолетовый – $\Omega_0=2.3$, голубой – $\Omega_0=3$, желтые – $\Omega_0=1.4..2$.

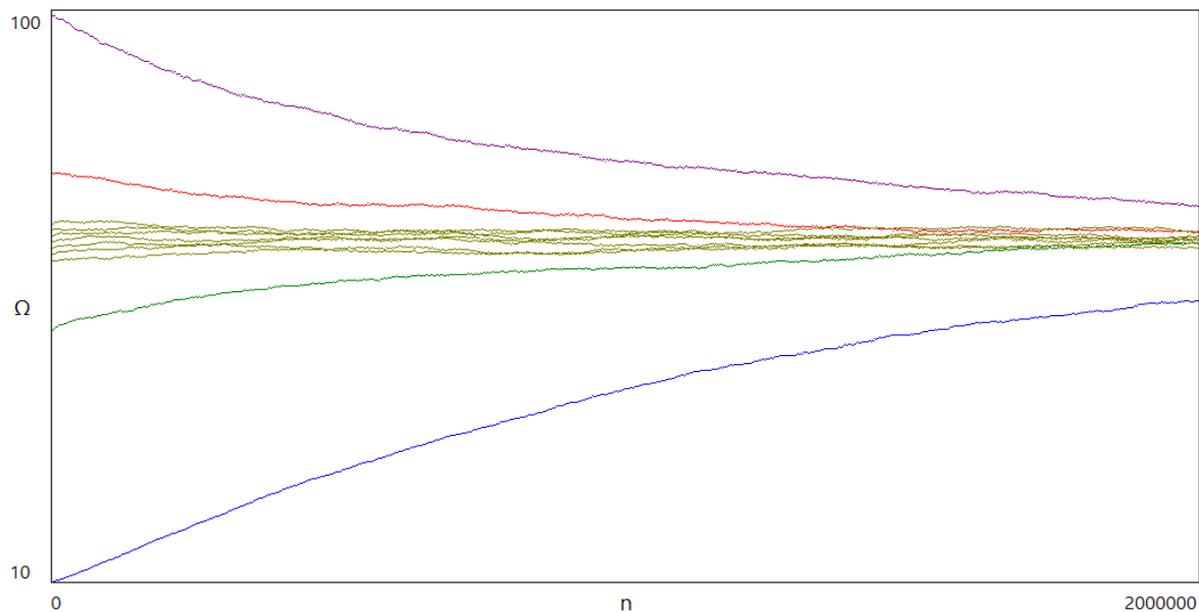


Рис. 4. Зависимость средней скорости от числа итераций ансамбля системы (1) с различными начальными $\varphi_0, \psi_0, \alpha_0$, заданными равномерно в хаотической области, при параметрах: $A=2$; $C=0.05$; $B=0.1$; $\varepsilon=0$; Цвет графика зависит от начальной скорости: синий – $\Omega_0=10$, зеленый – $\Omega_0=50$, красный – $\Omega_0=75$, фиолетовый – $\Omega_0=100$, желтые – $\Omega_0=61..67$.

систем в ансамбле. По вертикали откладывается скорость, а по горизонтали амплитуда колебаний границы – B . Красный график – максимальная скорость, синий график – средняя скорость, зелёный график – минимальная скорость (рис. 5).

На рис. 5.1 результаты вычисления продемонстрированы в линейном масштабе. Графики максимальной и средней скорости похожи на экспоненту. На графике в логарифмическом масштабе (рис. 5.2) видно, что на достаточно продолжительном участке наблюдаются почти прямые, что говорит об экспоненциальном росте, затем экспоненциальный рост снижается.

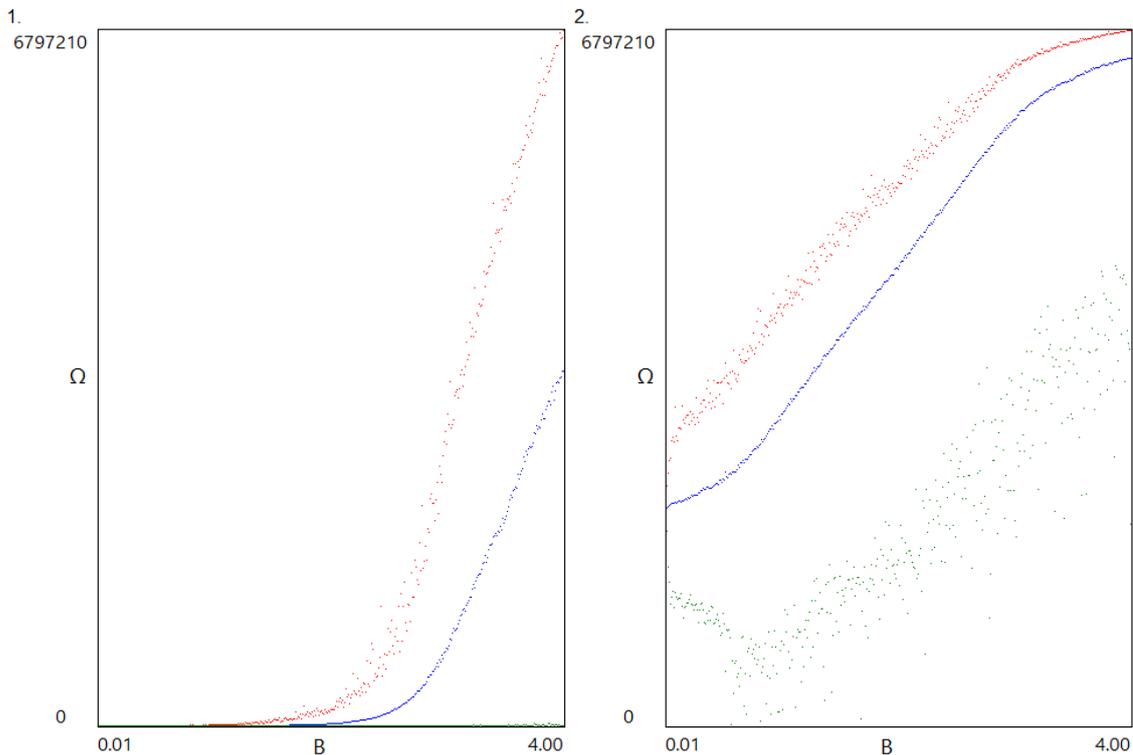


Рис. 5. Зависимость максимальной скорости в ансамбле (красный график), средней скорости (синий график), минимальной скорости в ансамбле (зелёный график) через 2000000 итераций от B системы (1) с различными начальными $\varphi_0, \psi_0, \alpha_0$, заданными равномерно в хаотической области, $\Omega_0 = 50$, с фиксированными параметрами: $A=2$; $C=0.05$. 1. Линейный масштаб; 2. Логарифмический масштаб.

Далее был рассмотрен диссипативный случай. Известно, что в диссипативных системах присутствуют аттракторы, а в случае слабой диссипации процесс выхода на аттрактор может быть очень длителен. Чтобы убедиться в том, что мы вышли на аттрактор, система итерировалась до тех пор, пока не вышла на устойчивый режим, затем итерировалась в несколько раз больше, чем до этого, чтобы убедиться, что данный режим не разрушится.

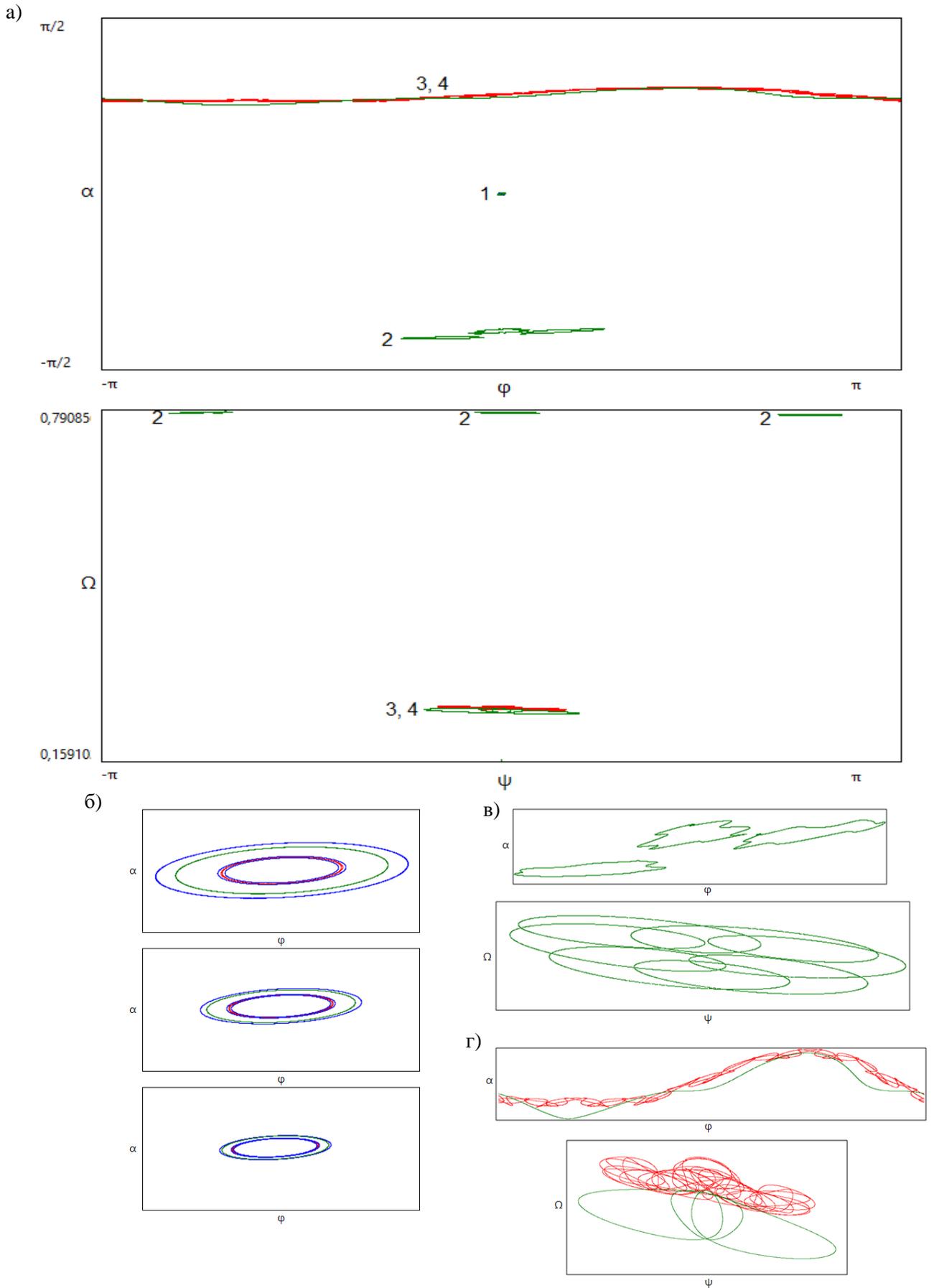


Рис. 6. а) Проекция фазового портрета системы (1) на плоскость $(\varphi; \alpha)$ (верхний рисунок) и на плоскость $(\Omega; \psi)$ (нижний рисунок) при параметрах: $A=2$; $B=0.01$; $C=0.05$; $\varepsilon=0.0001$; начальные условия заданы в таблице 4. Цифрами указаны номера аттракторов. б) демонстрация “закручивания” аттрактора 1 с ростом числа итераций в проекции $(\varphi; \alpha)$ с фиксированным масштабом (сверху вниз); в) аттрактор 2; г) аттракторы 3 и 4.

Далее приведён случай слабых колебаний $B = 0.01$ и слабой диссипации $\varepsilon = 0.0001$ (рис. 6а). Траектории из данных начальных условий (таблица 1) притянулись к 4-м аттракторам. Аттрактор 1 является устойчивым фокусом. Чтобы убедиться в этом, строился “снимок” фазовой проекции $(\varphi; \alpha)$ в фиксированном увеличенном масштабе через число итераций много больше, чем итераций для “снимка” (рис. 6б). В фиксированном масштабе траектория все ближе и ближе подходит к центру в то время, как остальные аттракторы неизменны. Аттракторы 2-4 являются устойчивыми двухчастотными торами. На рис. 6в и рис. 6г эти аттракторы приведены в удобном масштабе.

Динамика средней скорости при таких параметрах представлена на рис. 7. Можно видеть, что графики начинают быстро сближаться, а затем имеют общую тенденцию к замедлению. Можно предположить, что движение траекторий имеет две стадии. Первую стадию можно интерпретировать как переходной процесс. В ней траектории быстро приближаются к своим аттракторам, скорость которых, как можем видеть из границ скорости рис. 6а, не сильно отличается. Поэтому кажется, что графики стремятся к одной скорости. Вторую стадию можно интерпретировать как затухание за счёт диссипации. В ней траектории медленно, находясь уже близко, выходят на аттрактор.

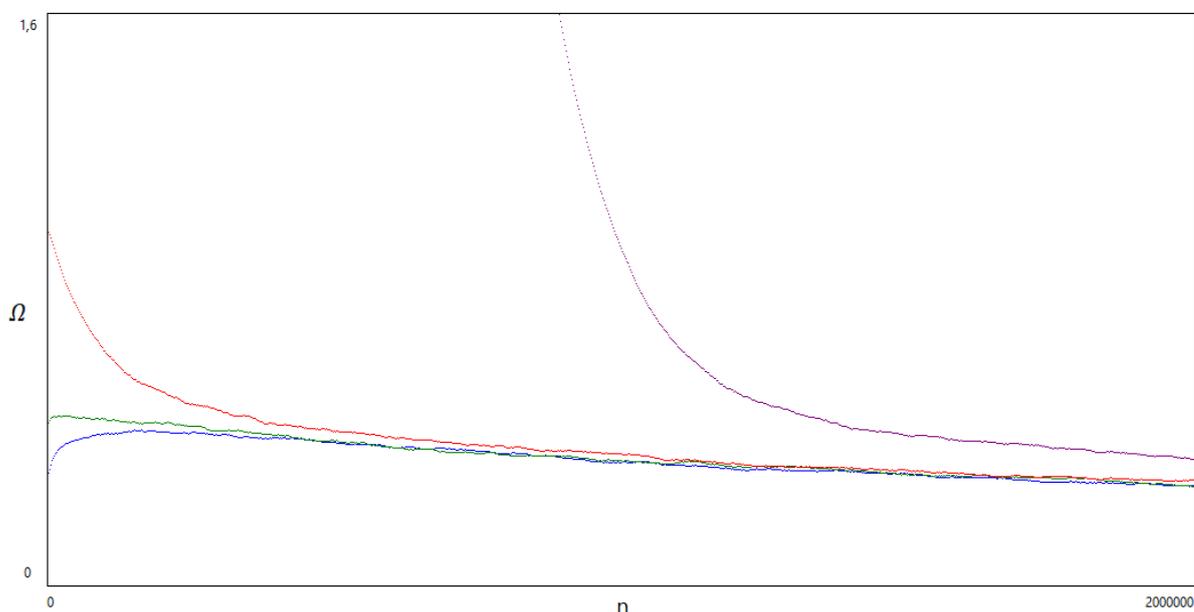


Рис. 7. Зависимость средней скорости от числа итераций ансамбля системы (35) с различными начальными $\varphi_0, \psi_0, \alpha_0$, заданными равномерно в хаотической области, при параметрах: $A=2; C=0.05; B=0.01; \varepsilon=0.0001$; Цвет графика зависит от начальной скорости: синий – $\Omega_0=0.3$, зеленый – $\Omega_0=0.4$, красный – $\Omega_0=1$, фиолетовый – $\Omega_0=1000$.

Был проведён расчет времени быстрой фазы. Для этого считалась средняя скорость, как это делалось до этого, для начальной скорости $\Omega_0 = 200$. Группировались

последовательно по несколько скоростей через каждые 2000 итераций и считалось стандартное отклонение. Считалось, что скорость стабилизировалась, когда стандартное отклонение слабо менялось через фиксированное, заранее заданное число итераций.

При параметрах $A = 2; C = 0.05; B = 0.01$; построился график зависимости времени стабилизации от значения диссипации. На рис. 8.1 продемонстрирован результат вычисления в линейном масштабе. Можно отследить общую тенденцию – график похож на гиперболу, хоть и при большой диссипации много точек далеко отходят от общей тенденции. Это значит, что метод плохо применим для большой диссипации. На графике в двойном логарифмическом масштабе (рис. 8.2), можем увидеть, что на некотором участке наблюдается почти линейный спад, что говорит о гиперболической зависимости.

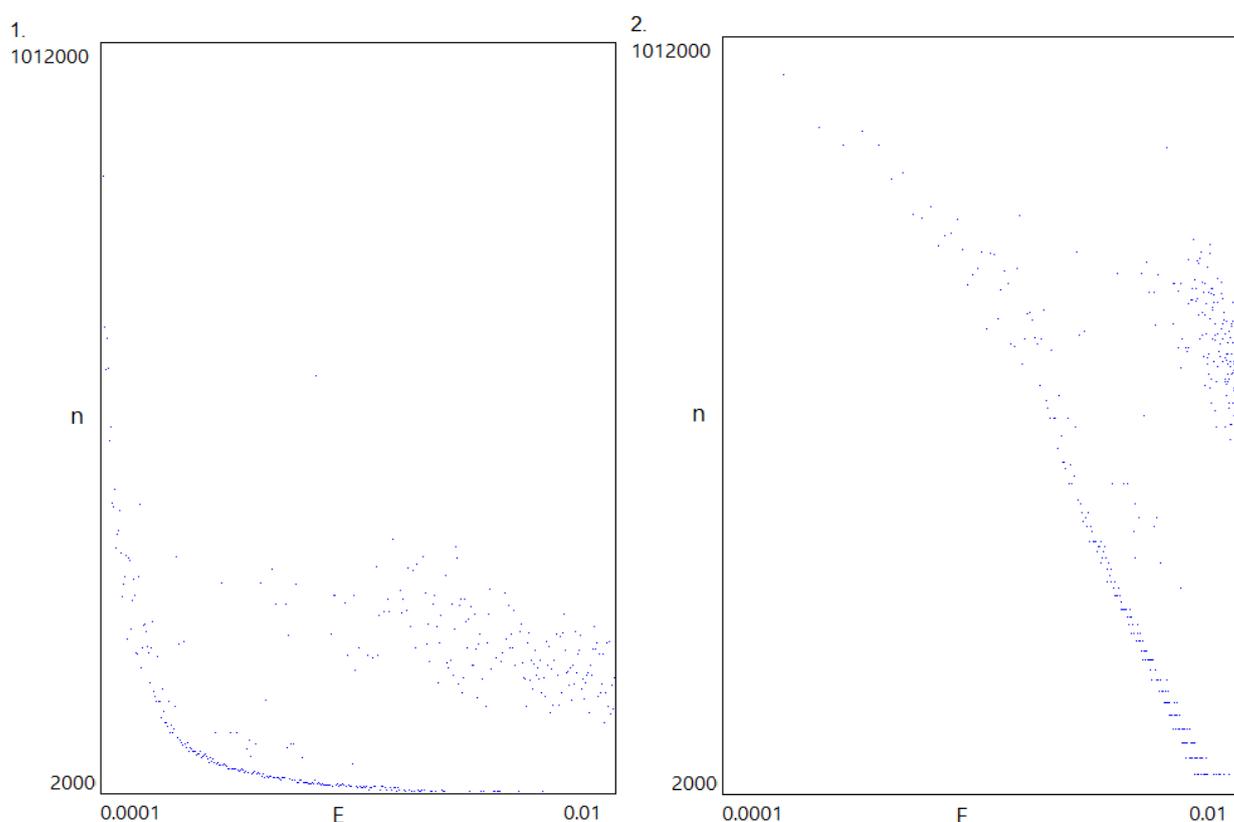


Рис. 8. Зависимость времени стабилизации от диссипации при параметрах: $A=2; C=0.05; B=0.01$. 1. Линейный масштаб; 2. Двойной логарифмический масштаб.

Заключение

Таким образом, в данной работе была рассмотрена система, которая является модифицированной моделью Теннисона – Либермана – Лихтенберга. Для ее описания было получено четырёхмерное отображение. В ходе исследования фазовых портретов было выявлено, что введение колебаний в модель Теннисона – Либермана – Лихтенберга переводит двухчастотные торы в трехчастотные, а введение диссипации приводит к образованию аттракторов, среди которых наблюдаются как неподвижные точки, так и предельные двухчастотные торы.

Была исследована зависимость максимальной скорости в ансамбле, средней скорости, минимальной скорости в ансамбле через 2000000 итераций от амплитуды колебаний стенки. Было обнаружено, что максимальная и средняя скорость имеют экспоненциальный рост на значительном участке V .

При исследовании динамики средней по ансамблю скорости были найдены параметры, при которых в системе реализуется эффект «бильярдного» демона Максвелла. В основном в системе есть предельная скорость, к которой все траектории стремятся. Причем эта скорость может иметь разброс значений около себя. Введение диссипаций ускоряет стабилизацию траекторий у предельной скорости, но также уменьшает значение предельной скорости.

Была исследована зависимость времени стабилизации от диссипации. Для этого был построен график, на значительном участке которого графики имеют гиперболическую зависимость.

Как уже говорилось ранее, предположительно, для ускорения Ферми в бильярде с осциллирующими границами достаточно, чтобы при фиксированной границе такой бильярд обладал хаотической динамикой. В нашей системе такое не происходит возможно потому, что при выводе уравнений не учитывается вторичный удар о верхнюю стенку. Так же причиной может быть то, что при большой скорости время пролета частицы становится много меньше периода колебаний стенки и удары о неё начинают распределяться по ней равномерно. А для ускорения нужно, чтобы удары приходились преимущественно в ускоряющую фазу.

Список использованной литературы

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
2. А. П. Кузнецов, А. В. Савин, Л. В. Тюрюкина. Введение в физику нелинейных отображений. Саратов: изд-во «Научная книга», 2010, 134 с.
3. Г. Шустер «Детерминированный хаос». М.: Мир, 1988, 250 с.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
5. А. Лихтенберг, М. Либерман «Регулярная и стохастическая динамика». М.: Мир, 1984, 529 с.
6. Fermi E. On the origin of the cosmic radiation // Phys. Rev. 1949. Vol. 75. P. 1169.
7. А.Ю. Лоскутов, А.Б. Рябов. Системы бильярдного типа и ускорение Ферми. // Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 5, 2008.
8. Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б., Акиншин Л.Г. // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. С. 1781.
9. А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Д.В. Савин. Особенности динамики почти консервативного отображения Икеды. // Письма в ЖТФ, 2007, том 33, вып. 3.
10. Д.И. Трубецков «Введение в синергетику. Колебания и волны». М.: URSS, 2012.
11. Лоскутов А.Ю. Динамический хаос. Системы классической механики. // Успехи физических наук, 2007, т.177, №9, 27 с.
12. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. Москва: Наука, 1988.