

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского
филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

**Компьютерное моделирование траектории движения маятника Фуко на
различных широтах поверхности Земли
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТА**

студента 4 курса 431 группы

направления 03.03.02 «Физика» физического факультета

Аристамбекова Батырхана Сергеевича

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.

О.А. Черкасова

20.05.2020

Зав. кафедрой

профессор, д.ф.-м.н.

В.М. Аникин

29.05.2020

Саратов 2020

Введение

Актуальность темы. Тот факт, что Земля вращается вокруг своей оси, сегодня известен каждому человеку. Ученые прилагали немалые усилия и потратили немало времени, чтобы, наконец, доказать это. Основной идеей большинства из них было сделать эффект вращения Земли длительным, накапливающимся, чтобы добиться большей наглядности в наблюдениях и точности в измерениях. Широкую известность приобрел опыт Фуко, что позволило сделать эффект отклонения плоскости качания маятника общедоступным для наблюдения.

Целью работы является выполнить компьютерное моделирование траектории движения маятника Фуко на различных широтах поверхности Земли и создание трёхмерной модели земного шара.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

- привести историческую справку о Леоне Фуко и его чудо-маятнике;
- выполнить компьютерное моделирование траектории движения маятника Фуко на различных широтах поверхности Земли;
- создать 3D-модель земного шара на основе полученных траекторий движения маятника Фуко.

В начале января 1851 года французский физик Леон Фуко в подвале своего дома поставил опыт, который, как он тогда еще не догадывался, повторит множество людей по всему миру. Суть опыта Фуко основана в наблюдении колебаний массивного шара, подвешенного на длинном тросе. Плоскость качаний маятника медленно поворачивается вокруг местной вертикали относительно Земли в Северном полушарии, причем в том же направлении, в каком совершается суточное вращение Солнца.

Выпускная квалификационная работа представлена на 45 страницах. Структура работы выглядит следующим образом: введение, 2 главы, заключение. Список использованных источников содержит 20 наименований, в том числе 3 статей в периодических изданиях за последние 10 лет. В тексте присутствует 40 рисунков.

Основное содержание работы

Постановка задачи для аналитического решения. Пусть у нас имеется маятник длиной l и массой m , который мы будем рассматривать. Причем, сферический, совершающий колебания в гравитационном поле Земли. Выберем систему отсчета, пусть она жестко связана с Землей и является инерциальной, для того, чтобы учесть силу инерции. Зададим широту, на которой находится маятник. Систему отсчета отложим так: направим ось Ox по параллели, ось Oy – по меридиану, ось Oz – по местной вертикали. Исходя из этого проекции угловой скорости вращения Земли $\vec{\omega}$ будут на оси соответственно равны, $\omega_x = 0$, $\omega_y = \cos \varphi$, $\omega_z = \sin \varphi$.

Для материальной точки (подвешенного груза) уравнение движения будет иметь следующий вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + 2m\vec{v} \times \vec{\omega} \quad (1)$$

где \vec{a} – ускорение груза; \vec{g} – ускорение свободного падения в данном месте, т. е. с учетом действия центробежной силы инерции; \vec{T} – сила натяжения троса; \vec{v} – скорость груза. А последнее слагаемое здесь это сила Кориолиса, направленная под некоторым углом к плоскости, в которой расположены силы тяжести и натяжения.

Спроектируем уравнение (1) на оси выбранной системы координат рисунок 1.

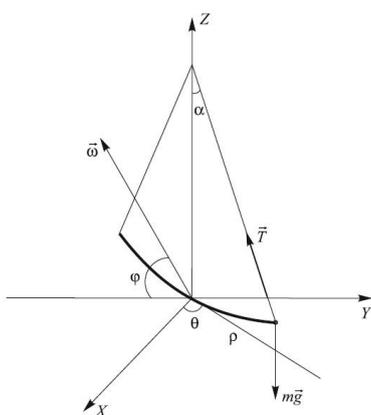


Рисунок 1 - Система отсчета: θ и ρ – полярные координаты; φ – широта местности; $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения Земли; $\vec{\alpha}$ – угол отклонения маятника; \vec{T} – сила натяжения; $m\vec{g}$ – сила тяжести

Получим в результате следующие выражения:

$$ma_x = T_x + 2m(v_y\omega_z - v_z\omega_y) \quad (2)$$

$$ma_y = T_y - 2mv_x\omega_z \quad (3)$$

$$ma_z = -mg + T_z + 2mv_x\omega_y \quad (4)$$

Где $T_x = -T \sin \alpha \cos \theta = -T \frac{x}{l}$; $T_y = -T \sin \alpha \sin \theta = -T \frac{y}{l}$; $T_z = T \cos \alpha = T \frac{l-z}{l}$; α – угол отклонения маятника от вертикали; θ – азимутальный угол.

При слабых колебаниях с малыми углами $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, поэтому $z=a_z = v_z = 0$. Из выражения (4) также следует, что $T \approx mg$. Исходя из полученного можно считать что груз движется в плоскости xOy . С учетом выражений для координат силы натяжения и после деления на массу уравнения (2) и (3) примут вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + 2 \frac{dy}{dt} \omega_z; \quad (5)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_0^2 y - 2 \frac{dx}{dt} \omega_z; \quad (6)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – собственная частота колебаний маятника

Для решения системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (5) и (6) при начальных условиях $x(0)=x_0$, $y(0)=0$, $v_x = 0$, $v_y = v_0$, которые обычно реализуются в эксперименте, используем преобразование Лапласа:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Результатом станет система линейных уравнений для изображений $X(s)$ и $Y(s)$:

$$(s^2 + \omega_0^2)X(s) - 2s\omega_z Y(s) = sx_0$$

$$(s^2 + \omega_0^2)Y(s) + 2s\omega_z X(s) = v_0 + 2\omega_z x_0$$

Решение данной системы уравнений записывается в виде:

$$X(s) = \frac{x_0\omega_- - v_0}{2\Omega} \frac{s}{s^2 + \omega_+^2} + \frac{x_0\omega_+ + v_0}{2\Omega} \frac{s}{s^2 + \omega_-^2}; \quad (7)$$

$$Y(s) = -\frac{x_0\omega_0^2 - v_0\omega_+}{2\Omega} \frac{1}{s^2 + \omega_+^2} + \frac{x_0\omega_0^2 + v_0\omega_-}{2\Omega} \frac{1}{s^2 + \omega_-^2}; \quad (8)$$

Введены следующие обозначения:

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_z^2},$$

$$\omega_{\pm} = \Omega \pm \omega_z.$$

Применив обратное преобразование Лапласа к (7) и (8) получим результат:

$$X(s) = \frac{x_0\omega_- - v_0}{2\Omega} \cos \omega_+ t + \frac{x_0\omega_+ + v_0}{2\Omega} \cos \omega_- t; \quad (9)$$

$$Y(s) = -\frac{x_0\omega_0^2 - v_0\omega_+}{2\Omega} \sin \omega_+ t + \frac{x_0\omega_0^2 + v_0\omega_-}{2\Omega} \sin \omega_- t; \quad (10)$$

Полученные зависимости полностью описывают движение математического маятника относительно Земли.

Метод эксперимента.

Программа моделирования траектории движения маятника Фуко на различных широтах поверхности Земли написана на оперативной системе ОС Debian GNU/Linux 10.3 в редакторе Vim языком C++. Для запуска программы был написан скрипт Run.sh.

При написании программы использованы следующие библиотеки:

- *cmath* – библиотека математических функций, для выполнения простых математических операций;

- *iostream* – библиотека функций поддержки ввода-вывода;

- *fstream* – библиотека, отвечающая за файловый поток. Её функции предоставляют возможность к манипуляции данными файлов, используя потоки данных. В данной работе эта библиотека подключена для вывода значений, нужных для построения графиков, полученных программой, в отдельные файлы, которые будет читать программа для построения графиков;

- *cstdlib* – данная библиотека содержит в себе функции, занимающиеся выделением памяти, преобразованием типов, а так же контролем процесса выполнения программ. В данной работе она будет использована конкретно для запуска программы рисования графиков;

- *Sstream*- библиотека, отвечающая за организацию работы со строками через интерфейс потоков с функциями и переменными.

Моделирование движения маятника Фуко на различных широтах поверхности Земли.

В результате работы программы были получены графики для различных широт в диапазоне от 0° до $\pm 180^\circ$, с шагом 10° .

При анализе полученных данных и графиков становится ясно, что они повторяют графики траектории маятника для симметричных широты (например, рисунок 2 и 3). С увеличением градуса широты, наблюдается тенденция увеличения расстояния между «лепестками» траектории движения маятника (рис. 4 и 5)

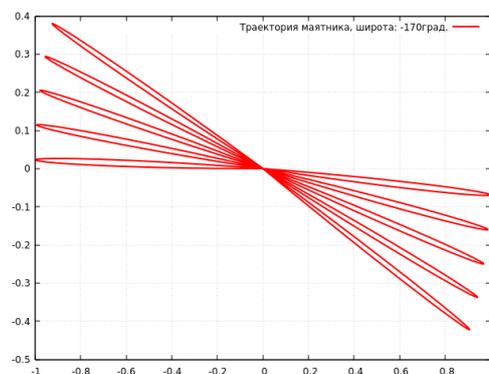
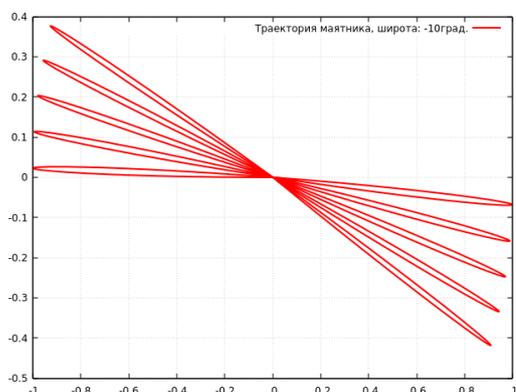


Рисунок 2 – График для широты минус 10° Рисунок 3 – График для широты минус 170°

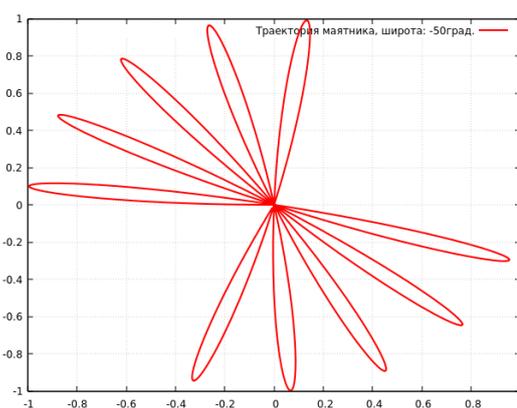
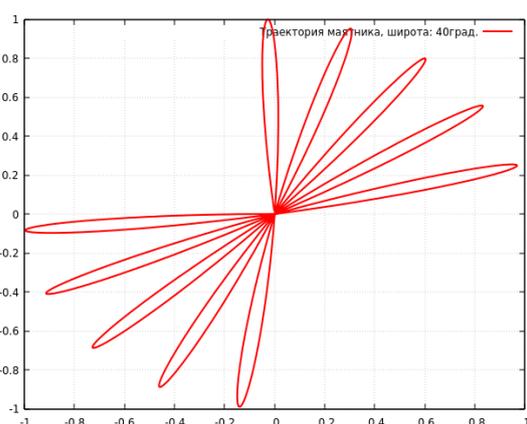


Рисунок 4 – График для широты 40° Рисунок 5 – График для широты минус 50° и минус 130°

Широта 90° градусов. Северный полюс. График траектории принял довольно симметричный вид (рисунок 6).

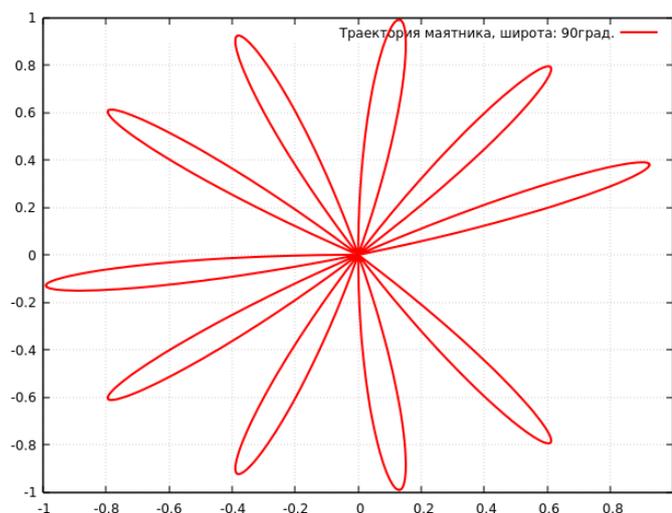


Рисунок 6 – График для широты 90 градусов

В данном случае для отрицательного значения широты -90 градусов, а именно – для Южного полюса ситуация повторяется. Если через центр траектории маятника провести горизонталь графики будут располагаться зеркально относительно нее.

Сравнительный анализ траекторий движения маятника Фуко на различных широтах поверхности Земли аппаратным методом графического наложения в программе Gnuplot

Для проведения сравнительного анализа с использованием аппаратного метода графического наложения требует одинаковое взаимное ориентирование на плоскости координатной сетки и цветового различия для наглядности. Функционал программы Gnuplot позволяет выполнить эти условия.

Можно заметить, что количество лепестков, которые пересеклись между собой, увеличивается (см. рис. 8)

Сравнение параллелей графиков траектории движения маятника в Северном и Южном полюсах привело к тому, что большинство лепестков разных графиков совпало друг с другом. При этом пара лепестков в каждом из графиков не совпали в один. Исходя из этого можно предположить, что радиусы разные. Полярный радиус меньше экваториального, что

соответствует действительности и доказывает адекватность полученной модели.

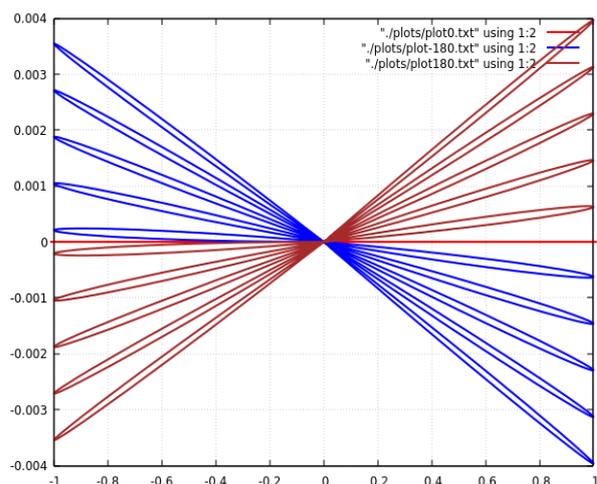


Рисунок 7 – Графики траектории широт 0, минус 180 и 180 градусов на одной плоскости координатной сетки.

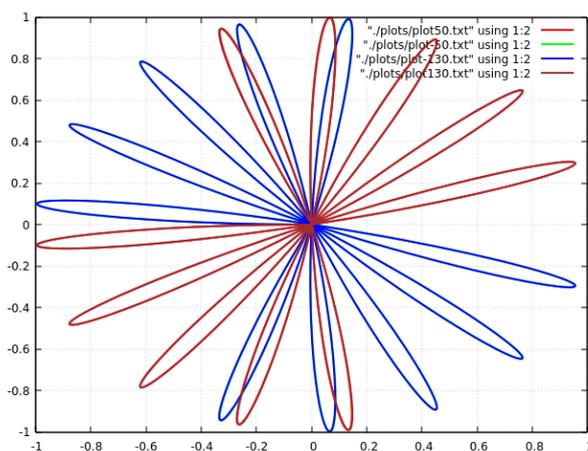


Рисунок 8 – Графики траектории широт 50, -50, -130, 130 градусов на одной плоскости координатной сетки.

Моделирование эллипсоида вращения по данным движения маятника Фуко на различных широтах поверхности Земли. Исходя из данных сравнения графиков стало ясно, что значения полярного и экваториального радиусов разные, причем экваториальный больше полярного. Подходящая под эти требования фигура – это эллипсоид вращения.

Смоделируем эллипсоид вращения по данным движения маятника Фуко, для этого используем значения угла отклонения, чтобы получить еще одну координату.

Программа моделирования эллипсоида вращения по данным маятника Фуко на различных широтах поверхности Земли написана так же на оперативной системе ОС Debian GNU/Linux 10.3 в том же редакторе Vim языком C++.

Для запуска программы будем пользоваться тем же скриптом Run.sh в той же директории. При написании программы использованы следующие библиотеки:

- *cmath* – библиотека математических функций, для выполнения простых математических операций;

- *iostream* – библиотека функций поддержки ввода-вывода;

- *fstream*- библиотека, отвечающая за файловый поток. Её функции предоставляют возможность к манипуляции данными файлов, используя потоки данных. В данной работе эта библиотека подключена для вывода значений, нужных для построения графиков, полученных программой, в отдельные файлы, которые будет читать программа для построения графиков;

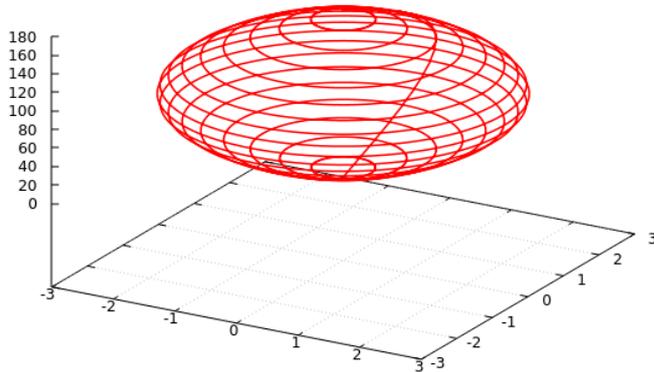
- *cstdlib* – данная библиотека содержит в себе функции, занимающиеся выделением памяти, преобразованием типов, а так же контролем процесса выполнения программ. В данной работе она будет использована конкретно для запуска программы рисования графиков;

- *Sstream*- библиотека, отвечающая за организацию работы со строками через интерфейс потоков с функциями и переменными.

- *Vector* - библиотека, эмулирующая работу стандартного массива C. Такую, как, например быстрый произвольный доступ к элементам. Кроме того дает дополнительные возможности, вроде автоматического изменения размера вектора при вставке или удалении элементов.

-*algorithm* – библиотека, включающая в себя набор функций для выполнения алгоритмических операций над контейнерами, например контейнером *vector*, и над другими последовательностями.

На рисунке 9 представлен эллипсоид вращения, полученный при моделировании.



Полученная при моделировании 3D-модель, соответствует современному представлению о форме земного шара, что лишнее доказывает правильность выбранных методов моделирования и анализа.

Рисунок 9 – Эллипсоид вращения

Заключение

Проведенное компьютерное моделирование траектории движения маятника Фуко на различных широтах поверхности Земли согласуется с аналитическим решением, так и с другими данными полученными при помощи моделирования. Вращение плоскости колебаний относительно земной поверхности объясняется поворотом земной поверхности, в результате чего плоскость колебаний маятника вращается относительно нее в направлении, противоположном вращению Земли. На полюсе Земли плоскость колебаний маятника сохраняет неподвижное положение относительно инерциальной системы отсчёта, поэтому угловая скорость поворота плоскости колебаний маятника относительно земной поверхности в точности равна угловой скорости вращения Земли. Легко убедиться в том, что плоскость колебаний на одинаковой по величине широте в Северном и Южном полушариях совершает вращение с одинаковой по величине скоростью, но направления вращения - противоположны.

Проведенное сравнение графиков траектории движения маятника Фуко на различных широтах поверхности Земли указывает на разницу полярного радиуса и радиуса экваториального. Причем, исходя из данных, полученных при сравнении, экваториальный радиус больше чем полярный. Это так же

согласуется с общеизвестными данными, что экваториальный радиус Земли составляет 6378 км, в то время как полярный радиус составляет 6357 км. Исходя из этого наиболее подходящая геометрическая фигура для описания формы Земли исходя из данных полученных в этой работе – эллипсоид вращения.

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

1. Создана математическая модель и компьютерная программа, описывающая движения маятника Фуко на различных широтах земного шара.
2. Получены траектории движения маятника Фука на всех широтах, которые согласуются с известными данными, что говорит об адекватности и достоверности компьютерного моделирования.
3. Подтверждено различие экваториального и полярного радиуса Земли, а также подтверждена форма земного шара, соответствующего эллипсоиду вращения