МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

Динамика связанных осцилляторов ван дер Поля-Матье

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 03.03.03 Радиофизика
физического факультета
Рамазанова Ибадуллы Рамзесовича

Научный руководитель
доцент, канд. физ.-мат. наук _______________ А.В. Слепнев

Зав. кафедрой
д-р физ.-мат. наук, проф. _______________ В.С. Анищенко

Саратов 2020

ВВЕДЕНИЕ

Исследование динамики связанных автоколебательных систем относится к числу основных направлений развития нелинейной динамики. Результаты, касающиеся динамики двух связанных генераторов периодических колебаний, к настоящему моменту стали классическими [1–3].

Также есть множество работ, посвященных эффекту параметрического резонанса, который является одним из важных явлений, изучаемых в рамках классической теории колебаний, и состоящий в неограниченном росте амплитуды колебаний гармонического осциллятора при определенном периодическом изменении его параметра (частоты колебаний). В качестве примера можно привести осцилляторы типа ван дер Поля – Матье, которые используются, в частности, при моделировании динамики заряда частиц пыли в плазме [4], а также микроэлектромеханических (МЭМС) и наноэлектромеханических (НЭМС) систем [5]. Такие автономные автоколебательные системы достаточно хорошо изучены. Кроме того, проводились исследования динамики осцилляторов типа ван дер Поля – Матье под действием вынуждающей силы [5, 6].

Логичным развитием данного направления является исследование взаимной синхронизации связанных автоколебательных параметрических систем. В данной работе исследуется поведение двух связанных осцилляторов ван дер Поля – Матье Динамика такого автономного автоколебательного параметрического осциллятора определяется, в зависимости от значений управляющих параметров, либо его автоколебательной, либо параметрической составляющей. Поэтому рассматриваются все возможные сочетания: оба осциллятора в автоколебательном режиме; оба осциллятора в параметрическом режиме; один осциллятор в автоколебательном режиме, другой — в параметрическом.

Целью работы является исследование динамики двух связанных осцилляторов ван дер Поля – Матье, при различных амплитудах параметрического воздействия.

Основное содержание работы

В первой главе рассмотрено, что из себя представляет параметрический резонанс, и проведен обзор некоторых работ, посвященных исследованию динамики параметрических систем на реальных и математических моделях.

В частности, показаны результаты исследований параметрических колебаний в модели осциллятора с одной степенью свободы, состоящего из пружины с периодически меняющейся жесткостью и нелинейным демпфированием, а также рассмотрены синхронизация и параметрический резонанс в микро- и наноэлектромеханических системах.

Во второй главе приведена модель исследуемой системы и рассмотрены численные методы, применяемые при ее исследовании.

Исследуемая система представляет собой два диффузионно связанных осциллятора ван дер Поля – Матье без внешнего воздействия. Система уравнений, описывающих ее, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = (e - x_1^2)y_1 - w_1^2\left(1 - A_{p1} sin w_{p1} t\right)x_1 + k(y_2 - y_1), \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 = (e - x_2^2)y_2 - w_2^2\left(1 - A_{p2} sin w_{p2} t\right)x_2 + k(y_1 - y_2). \end{cases}$$

(2.1)

Здесь, e — параметр диссипации, w_1 и w_2 — собственные частоты осцилляторов, A_{p1} и A_{p2} — амплитуды параметрического воздействия, w_{p1} и w_{p1} — частоты параметрического воздействия, k — коэффициент связи.

В работе проводится численное исследование взаимодействия осцилляторов при различных амплитудах параметрического возбуждения в области основного параметрического резонанса $w_{p1} = w_{p2} = 2$.

Интегрирование системы уравнений проводится модифицированным методом Эйлера, поскольку он обеспечивает достаточную точность и является одним из самых простых методов интегрирования дифференциальных уравнений. Также производится расчет ляпуновских показателей, которые показывают устойчивость фазовой траектории. Для подобных динамических систем возможен только численный расчет ляпуновских показателей, который производится на основе уравнений в вариациях для эволюции малого возмущения в линейном приближении.

Для исследуемой системы уравнения в вариациях имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{y}_1, \\ \dot{\tilde{y}}_1 = -2x_1y_1\tilde{x}_1 + (e - x_1^2)\tilde{y}_1 - w_1^2\big(1 - A_{p1}sinw_{p1}t\big)\tilde{x}_1 + k(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1), \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{y}_2, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = -2x_2y_2\tilde{x}_2 + (e - x_2^2)\tilde{y}_2 - w_2^2\big(1 - A_{p2}sinw_{p2}t\big)\tilde{x}_2 + k(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2). \end{cases}$$

В третьей главе приведены результаты исследования взаимодействия двух связанных осцилляторов ван дер Поля – Матье. Рассмотрено взаимодействие осцилляторов в трех случаях: в случае слабого параметрического возбуждения обоих осцилляторов, в случае сильного параметрического возбуждения одного из осцилляторов и слабом — другого и в случае сильного параметрического возбуждения обоих осцилляторов.

В первом случае была получена широкая область синхронизации, частота колебаний в которой определяется как $w = (w_1 + w_2)/2$ (рис. 1).

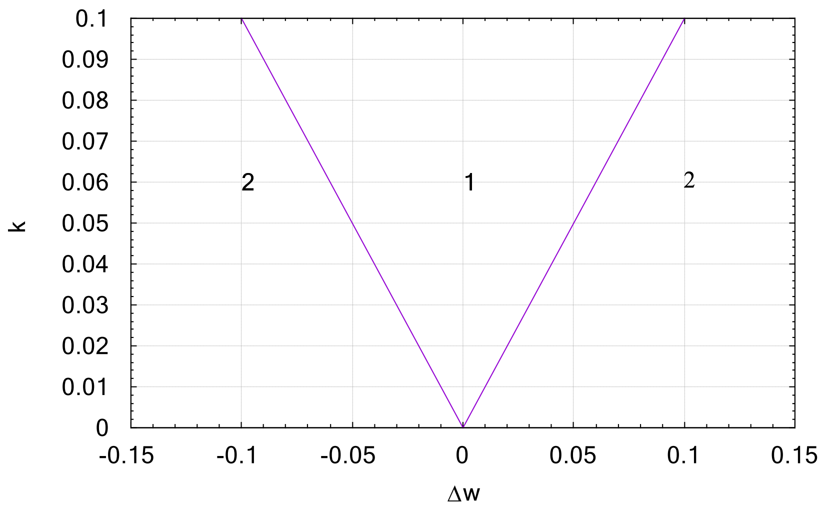

Рисунок 1 – Область синхронизации при $A_{p1} = A_{p2} = 0.001$

Спектр ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) при этом имеет сигнатуру (0, –, –, –), что соответствует автоколебаниям.

Во втором случае область синхронизации становится значительно уже, а частота колебаний в области синхронизации определяется как $w = 0.5w_p$ (рис. 2). При коэффициенте связи $k > 0.55$, слева и справа от области полной синхронизации располагаются области фазо-частотной синхронизации, а выход из области фазо-частотной синхронизации в область несинхронных колебаний сопровождается хаотическим режимом.

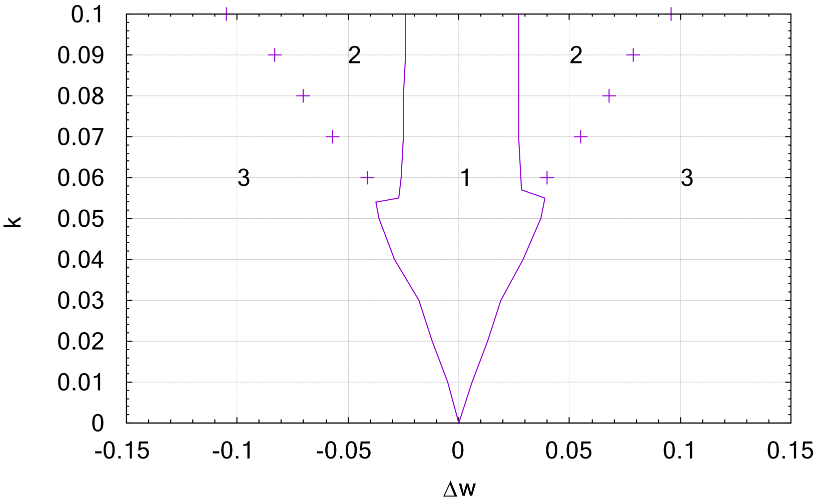

Рисунок 2 – Область синхронизации при $A_{p1} = 0.1,\ A_{p2} = 0.001$

На рисунке 3 представлен спектр ЛХП при $k = 0.07$, на котором имеются области с положительным старшим показателем, что подтверждает наличие хаотических режимов при $k > 0.55$.

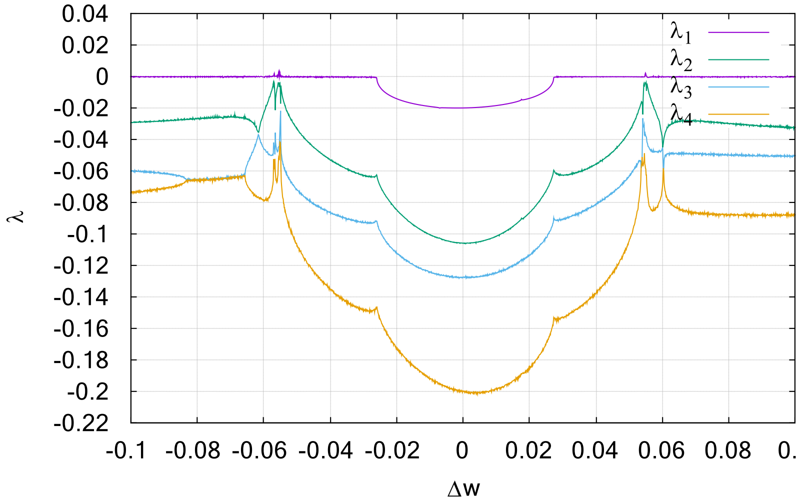

Рисунок 3 – Спектр ЛХП при $k = 0.07$

Внутри области синхронизации все показатели становятся отрицательными, что свидетельствует о том, что в данной области колебания определяются параметрическим воздействием.

В третьем случае эффекта синхронизации при вариации параметров системы не наблюдается. Но при этом, при некоторых значениях параметров, наблюдается переход к хаотической динамике. На рисунке 4 представлен спектр одного из таких режимов.

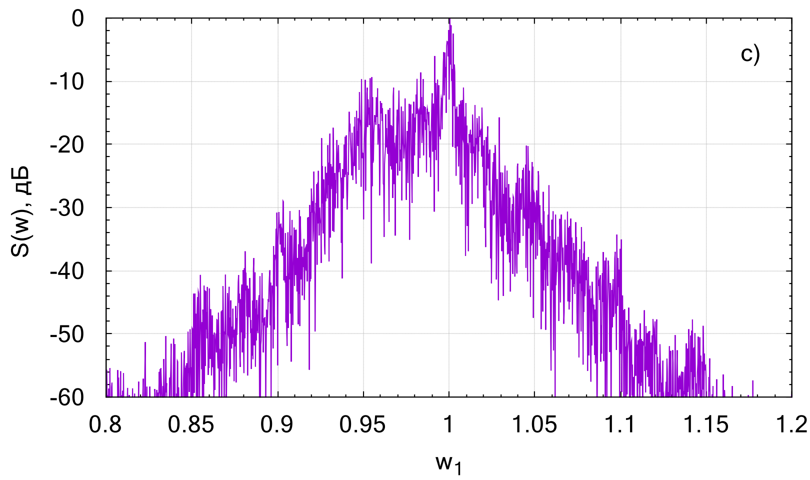

Рисунок 4 – Спектр колебаний при $\Delta w = 0.05$ и $k = 0.075$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование взаимодействия двух осцилляторов ван дер Поля – Матье показало, что при слабом параметрическом возбуждении обоих осцилляторов, а также при сильном параметрическом возбуждении одного из осцилляторов и слабом — другого, возможна полная синхронизация. В последнем случае, а также при сильном параметрическом возбуждении обоих осцилляторов при некоторых значениях параметров наблюдается хаотическая динамика. Это подтверждается переходом старшего показателя Ляпунова в положительную область. Кроме того, показано, что при сильном параметрическом возбуждении одного из осцилляторов и слабом — другого колебания в области синхронизации определяются параметрическим воздействием. Такие же области наблюдаются и при сильном параметрическом возбуждении обоих осцилляторов, но синхронизации в этом случае не происходит.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.: Ижевск: ИКИ, 2008. – 136 с.

2. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация – фундаментальное нелинейное явление. М.:Техносфера, 2003. - 496 с.

3. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.; Ижевск: РХД, 2000. - 560 с.

4. Momeni M., Kourakis I. Moslehi-Fard M., Shukla P. K. A van der Pol-Mathieu equation for the dynamics of dust grain charge in dusty plasmas // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. V. 40. P. F473.

5. Houri, S. Direct and parametric synchronization of a graphene self-oscillator / S. Houri, S.J. Cartamil-Bueno, M. Poot, P.G. Steeneken, H.S.J. van der Zant, W.J. Venstra // Applied Physics Letters. 2017. V. 110, I. 7. P. 073103.

6. Warminski, J. Synchronisation effects and chaos in the van der Pol-Mathieu oscillator // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2001. V. 39, I. 4. P. 861–884.