Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной физики
и метаматериалов на базе Саратовского филиала
Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО ПОДХОДА К АНАЛИЗУ
ДВУМЕРНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ

ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ (МАГИСТЕРСКОЙ) РАБОТЫ

студента 2 курса 256 группы
направления 03.04.02 «Физика» физического факультета
Душева Ильи Ивановича

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор ____________В.М.Аникин

«08» 06.2020

Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор _____________А.С.Ремизов
«08» 06.2020

Саратов
2020

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуализация работы. Естественным для динамических систем с хаотическим поведением является статистическое описание. Поскольку начальное состояние физической системы не может быть задано абсолютно точно (например, из-за ограничений измерительных инструментов), то всегда приходится рассматривать некоторую (пусть и очень маленькую) область начальных значений. При движении в ограниченной области пространства экспоненциальная расходимость с течением времени близких орбит приводит к перемешиванию начальных точек по всей области. После такого перемешивания бессмысленно говорить о координате частицы, но можно найти вероятность её нахождения в некоторой точке.

При вероятностном описании начальное значение рассматривается как случайная величина со своим законом распреления, отслеживается не динамика точки в фазовом пространстве, а эволюция плотности распределения начальной величины под действием оператора Перрона-Фробениуса. Такой подход оказался весьма плодотворным для аналитического исследования свойств одномерных хаотических отображений. Для двумерного случая результаты заметно скромнее, возникает ряд сложностей, которые на данный момент не разрешены в общем виде, но в ряде частных случаев удается достичь успеха.

Двумерные отображения попадают в рассмотрение различными путями. Некоторые есть результат обобщения одномерных отображений, другие моделируют ка-кое-то явление, для которого характерно дискретное время. Часто двумерные отображения возникают как разностные схемы, при численном решении систем дифференциальных уравнений. Наконец, некоторые двумерные отображения были изобретены искусственно, с целью демонстрации того, какие сложные структуры могут возникать в этих моделях.

Целью работы является попытка применить операторный метод к исследованию двумерных хаотических отображений.

В **задачи** работы входят:

1) изложение операторного метода исследования хаотических отображений, свойства оператора Фробениуса-Перрона;

2) анализ возможности их операторного описания классических двумерных хаотических отображений;

3) выделение особенности эволюционных преобразований двумерных отображений в общем виде, классификация известных отображений;

4) получение явного вида оператора Фробениуса-Перрона для известных двумерных отображений и (при наличии аналитических возможностей) определение инвариантной плотность и решение спектральной задачи.

СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении к ВКР сформулированы аспектные характеристики работы - актуальность, цель работы, решаемые задачи.

В первой главе рассматривается ряд классических и хорошо известных двумерных отображений (отображение Энона, Заславского, Холмса, Икеды, Акулиничева, Пекаря, стандартное и универсальное).

Двумерные отображения можно рассматривать как модельные динамические системы, состояние которых характеризуется двумя скалярными переменными x и y – фазовое пространство этой динамической системы двумерно. Отображение переводит одни точки фазовой плоскости в другие с помощью некоторого преобразования:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(x_n, y_n) \tag{1}$$

Во второй главе представлен вероятностный подход к описанию хаотических отображений, осуществляется переход от одномерного к двумерному случаю, выявлены типовые преобразования для двумерных отображений, на основе которых дается их классификация.

При операторном описании считаем, что начальное значение – пара случайных величин (X_0, Y_0) со своим законом распределения. При итерациях плотность распределения меняется, ее эволюцию описывает оператор Фробениуса-Перрона:

$$\hat{P}\rho_{n+1}(x, y) = \rho_n(x, y) \quad (2)$$

Если компоненты двумерного отображения заданы функциями

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(f(x_n, y_n), g(x_n, y_n)\right) \quad (3)$$

То соответствующий двумерный оператор Перрона-Фробениуса имеет вид:

$$\hat{P}\rho(x, y) = \int_C^D \int_A^B \delta\left(x - f(t, \tau)\right) \delta\left(y - g(t, \tau)\right) \rho(t, \tau)\, dt d\tau \quad (4)$$

При этом инвариантная плотность – неподвижная точка оператора:

$$\hat{P}\tilde{\rho}(x, y) = \tilde{\rho}(x, y) \quad (5)$$

Оператор эволюции в (1) может быть задан разными способами. В случае (3), преобразование каждой из координат фазовой плоскости может зависеть как от своего предыдущего значения, так и от предыдущих значений других координат. Можно выделить несколько классов преобразований:

Таблица 1 – Классы преобразований

Класс	**Тип зависимости**	**Отображения**
Координатные преобразования независимы	$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(f(x_n), g(y_n)\right)$ (6)	Отображения типа «преломление хлебов»
Есть зависимость по одной из координат	$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(f(x_n),\ g(x_n,\ y_n)\right)$ (7а) $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(f(x_n,\ y_n),\ g(y_n)\right)$ (7б) $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(f(y_n),\ g(x_n,\ y_n)\right)$ (7в) $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(f(x_n,\ y_n),\ g(x_n)\right)$ (7г)	отображение «Пекаря», Энона, кубическое, частный случай отображения Заславского
Преобразования взаимозависимы	$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(f(x_n,\ y_n),\ g(x_n,\ y_n)\right)$ (8)	отображение Икеды, Стандартное, Акулиничева

Различные классы преобразований характеризуются особенностями операторного описания отображений.

Третья глава посвящена применению операторного метода к описанным ранее двумерным отображениями и обсуждению результатов. Для ряда отображений (частный случай отображения Заславского, кубическое и отображение Энона) построен оператора Фробениуса-Перрона и осуществлен переход от интегральной записи оператора к функциональным уравнениям.

Для класса преобразований (6) двумерный оператор выражается через соответствующие одномерные: $\hat{P}\rho(x,y) = \hat{P}_x\rho(x)\hat{P}_y\rho(y)$.

Для преобразований (7) благодаря фильтрующему свойству дельта-функции и наличию одномерной функциональной зависимости по одной из координат можно избавиться от интегралов в операторе Перрона-Фробениуса. Результаты для некоторых отображений приведены ниже.

Отображение Пекаря

Тип преобразования (7а), оператор эволюции:

$$(x_{n+1},\ y_{n+1}) = \left(2x\theta_{0,\frac{1}{2}}(x) + (2x-1)\theta_{\frac{1}{2},1}(x), \frac{y}{2}\theta_{0,\frac{1}{2}}(x) + \frac{y+1}{2}\theta_{\frac{1}{2},1}(x)\right)$$

Оператор Перрона-Фробениуса:

$$\hat{P}\rho(x,y) = \left[\rho\left(\frac{x}{2}, 2y\right)\theta_{0,\frac{1}{2}}(y) + \rho\left(\frac{x+1}{2}, 2y-1\right)\theta_{\frac{1}{2},1}(y)\right]\theta_{0,\,1}(x)$$

Следующие результаты являются новыми.

Отображение Заславского (частный случай)

Тип преобразования (7в), оператор эволюции:

$$(x_{n+1},\ y_{n+1}) = (y_n,\ -x_n - Ksiny_n)$$

Оператор Перрона-Фробениуса:

$$\hat{P}\rho(x,y) = \rho(-y - ksinx, x)\theta_{-B-ksinx-1,-A-ksinx}(x)\theta_{C,D}(y)$$

Кубическое отображение

Тип преобразования (7в), оператор эволюции:

$$(x_{n+1},\ y_{n+1}) = (y_n, -bx_n + dy_n - y_n^3)$$

Оператор Перрона-Фробениуса:

$$\hat{P}\rho(x,y) = \rho\left(\frac{d*x - y - x^3}{b}, x\right)\theta_{dx-x^3-bB,dx-x^3-bA}(x)\theta_{C,D}(y)$$

Отображение Энона

Тип преобразования (7г), оператор эволюции:

$$(x_{n+1},\ y_{n+1}) = (1 - \alpha x_n^2 + y_n, \beta x_n)$$

Оператор Перрона-Фробениуса:

$$\hat{P}\rho(x,y) = \frac{1}{\beta}\rho\left(\frac{y}{\beta}, x + \frac{\alpha}{\beta^2}y^2 - 1\right)\theta_{\beta A,\beta B}(x)\theta_{1-\frac{\alpha}{\beta^2}y^2+C,1-\frac{\alpha}{\beta^2}y^2+D}(y)$$

Для поиска инвариантной плотности следует решить уравнение (5) с соответствующим видом оператора.

В Заключении сформулированы выводы по работе.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

В выпускной квалификационной работе проведен анализ классических и хорошо известных двумерных хаотических отображений, таких как отображение Эно, Заславского, «пекаря», кубическое отображение Холмса, на предмет возможности их операторного описания. Изложен операторный метод исследования хаотических одномерных и двумерных отображений, свойства оператора Фробениуса-Перрона и особенности эволюционных преобразований. Приведены результаты других авторов по исследованию отображений пекаря и Акулиничева операторным методом.

Основным достоинством операторного подхода в изучении хаотических отображений является переход от поиска и исследования точного решения нелинейных разностных уравнений, определяющих анализируемую динамическую систему, к решению спектральной задачи для линейного оператора, ассоциированного с данной динамической системой. Дискретный спектр оператора говорит о скорости установления равновесного состояния в системе. Низшая собственная функция, соответствующая единичному собственному числу, имеет смысл инвариантной плотности и позволяет определить вероятность нахождения системы в том или ином состоянии.

Выяснено, какие трудности возникают, если координатные преобразования взаимосвязаны. В этой ситуации возникают сложности с получением явного вида оператора, а именно, не удаётся в общем случае перейти от интегрального представления оператора к функциональному. Показано, что при отдельных типах взаимосвязи эволюционных преобразований такой переход осуществим.

Получен явных вид оператора Фробениуса-Перрона для отображений Энона, кубического отображения, частного случая отображения Заславского.

Список использованных источников

1. Шустер Г. Детерминированный хаос. М., 1988.
2. Кузнецов С.П. Динамический хаос.- М.: Физматлит, 2001. 295 с.
3. В.М. Аникин. Статистические характеристики отображения И.М.Акулиничева. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2015. Т. 15, вып. 2, стр. 43-48
4. Андреев К.В., Красичков Л.В. Моделирование электрической активности нейрона с помощью кусочно-непрерывных отображений // Письма в ЖТФ, 2003, том 29, выпуск 3, стр.46-52
5. Hiroshi H. Hasegawa and Dean J. Driebe, Intrinsic irreversibility and the validity of the kinetic description of chaotic systems //Physical Review E, Volume 50, number 3, September 1994, page 1781
6. S. Lakshmibala and M. V. Satyanarayana, Phase estimation, photon cloning and the Bernoulli map // Physics Letters A, Volume 298, Issue 1, 27 May 2002, Pages 1-6
7. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. – Новосибирск: Наука, 1988.
8. Грегори Р., Кришнамурти Е. Безошибочные вычисления. Методы и приложения. - М.: Мир, 1988. – 208 с.
9. Бабенко К.И. Основы численного анализа. - М.: Наука, 1986. Гл.9.
10. Агекян Т.А. Теория вероятностей для астрономов и физиков. – М.:Наука, 1974.
11. Lasota A., Mackey M.C. Probabilistic properties of deterministic systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 360 c.
12. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

13. Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С. Аналитическое решение спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса кусочно–линейных хаотических отображений// Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. с.16–34.

14. Мун Ф. Хаотические колебания. М. Мир, 1990г, с. 39, 209, 282.

15. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. Москва, Наука, 1991, с.41.

16. Лихтенберг А., Либерман М. "Регулярная и стохастическая динамик". Москва,Мир, 1984, с.528.

17. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. Москва. Наука, 1974, с.271.

18. Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. – М.: Изд–во физ.–мат.лит., 2002. – 252 с.

19. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Курс лекций – М.: Изд–во физ.–мат. лит., 2001. – 296 с.

20. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 709.

21. Кузнецов А.П., Савин А.В., Савин Д.В. Особенности динамики почти консервативного отображения Икеды. // Письма в ЖТФ, 2007, том 33, выпуск 3, с.57-63

22. Шилов Г.Е. Математический анализ, второй специальный курс. М. Наука. 1965