Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

*Кафедра компьютерной физики
и метаматериалов на базе
Саратовского филиала
Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН*

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И МАРКОВСКИХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РЕЛЕЯ

АВТОРЕФЕРАТ
ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ
(МАГИСТЕРСКОЙ) РАБОТЫ

студента 2 курса 256 группы
направления 03.04.02 «Физика» физического факультета
Емельяненко Алексея Аркадьевича

Научный руководитель
д.ф.-м.н. профессор ____________________________ В.М. Аникин
(подпись, дата)

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. профессор ____________________________ В.М. Аникин
(подпись, дата)

Саратов 2020

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. При изучении физических систем и процессов, подверженных случайному влиянию, строят математические модели, в которых явным образом учитывается случайный характер реализации процесса (функционирования системы). В модель закладывается предположение о вероятностных свойствах (вероятностном распределении) флуктуирующих параметров. Затем формулируется алгоритм и составляется компьютерная программа, в которой особая роль отводится генераторам случайных величин, имеющие оговоренные в условии задачи вероятностные законы (плотность распределения, функцию распределения, числовые параметры этих распределений и т.д.).

Эффективность решения статистических задач зависит прежде всего от качества датчиков используемых при моделировании случайных величин и случайных процессов (случайную величину можно трактовать как значение процесса в его сечении).

В данной выпускной квалификационной работе (ВКР) строятся алгоритмы моделирования случайных величин, имеющих распределение Релея, а также марковских диффузионных процессов, сечение которых описывается распределением Релея. Выбор данного распределения связан с тем, что, во-первых, именно это распределение широко используется при моделировании радиотехнических и надежностных задач радиоэлектроники. Кроме того, в работе предлагается модель диффузионного процесса, не являющегося гауссовским (нормальным), как того требует классическая модель диффузии, т.е. предлагаемая модель может быть сопоставлена с процессом диффузии, происходящим в средах сложной структуры.

Цель ВКР – конструирование датчиков случайных величин и моделей случайных диффузионных процессов, характеризуемых распределением Релея.

Соответственно, ***объектом исследования*** ВКР являются разностные уравнения первого порядка (как основа датчиков случайных величин) и стохастические дифференциальные уравнения, решения которых непрерывны, хотя приращения процессов не являются гауссовскими.

Предмет исследования – хаотические отображения как датчиков случайных величин с распределением Релея, уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (УФПК) с точным решением в виде релеевского распределения и соответствующие этому УФПК стохастические дифференциальные уравнения как моделей диффузионных процессов.

Задачи ВКР:

- разработка алгоритмов датчиков случайных величин на базе различных хаотических отображений с инвариантной плотностью в форме релеевского распределения посредством применения метода синтеза сопряженных отображений (глава 1);

- представление собственных функций оператора Перрона-Фробениуса отображений с инвариантной плотностью в форме закона Релея через собственные функции базового кусочно-линейного отображения (глава 2);

- определение коэффициентов сноса и диффузии УФПК, обладающего точным (аналитическим) решением в форме плотности распределения Релея (глава 3);

- построение стохастического дифференциального уравнения как модели случайного процесса с релеевским распределением в сечении конструктивным способом (через стандартный винеровский процесс) (глава 4).

Полученные результаты обладают ***новизной и практической направленностью***. Нахождение генератора с релеевским распределением имеет значение в теории надежности для моделирования времени жизни различных устройств. Модель случайного процесса с релеевским распределением в сечении определяет новый тип марковского диффузионного процесса. Кроме того, наличие параметра в отображении Релея заставляет взглянуть на него и с точки зрения построения схем хаотического кодирования – наличие параметра усложняет задачу криптоанализа.

Защищаемые результаты – построенные алгоритмы случайных величин и случайных процессов.

СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованных источников. **Во введении** сформулированы аспектные характеристики работы: актуальность, цель и задачи, научнамя и прикладная значимость, новизна.

В главе 1 излагаются общие правила построения хаотических отображений, обладающих заданной инвариантной плотностью, на основе соответствующего сопряжения с базовыми, отображениями, характеризуемых равномерным инвариантным распределением. Затем строятся два генератора псевдо случайных чисел, обладающих распределением Релея. Один генератор построен на основе сопряжения с двоичным сдвигом Бернулли, а второй – на основе сопряжения с пирамидальным отображением.

Распределение Релея определяется вероятностными законами:

$$f(x;\sigma)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad x>0\ ,\quad \sigma>0 \quad (1)$$

(плотность вероятности);

$$F(x;\sigma)=1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad x>0 \quad (2)$$

(закон распределения) Здесь σ - параметр распределения.

Аналитическое выражение для итеративной функции отображения, сопряженного с пирамидальным отображением, и его вид представлены на нижеследующих формуле и графике (рисунок 1):

$$x_{n+1}=\sqrt{2\sigma^2\ln\left|2e^{-\frac{x_n^2}{2\sigma^2}}-1\right|},\qquad 0\le x_n\le\infty. \quad (3)$$

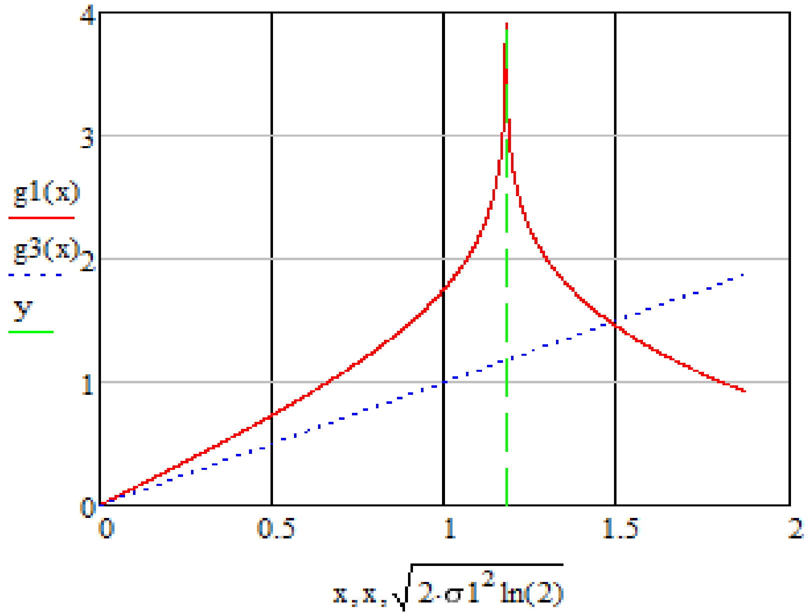

Рисунок 1. Отображение с инвариантной плотностью
в форме закона Релея на базе пирамидального отображения

В **главе 2** приводятся аналитические выражения для собственных функций оператора Перрона-Фробениуса, соотнесенного с отображениями, обладающими инвариантным релеевским распределением.

Главы 3 и 4 посвящены компьютерному моделированию марковских случайных диффузионных (непрерывных) процессов, отличительной особенностью которых является релеевское распределение сечений процесса. Прежде определяются типы математического описания случайных процессов:

1) в терминах *случайных же процессов* с полностью определенными вероятностными характеристиками или уравнений относительно соответствующих случайных функций,

2) в терминах *детерминированных функций,* являющихся многомерными плотностями распределения, или уравнений относительно этих плотностей.

В работе формулируются как моделирующие уравнения для конструктивного описания негауссовских марковских диффузионных случайных процессов через эталонный винеровский (гауссовский) процесс, так и уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК), обладающие точным решением (одномерным распределением) в форме распределения Релея. Определены связи между коэффициентами сноса и диффузии уравнений ФПК и стохастических дифференциальных уравнений, задающих конструктивный алгоритм моделирования диффузионного случайного процесса, иначе говоря, управляющих диффузионным случайным процессом, обладающим в стационарном режиме одномерной плотностью вероятности в форме распределения Релея.

Винеровский процесс $W_t = W(t), t > 0$, по определению, обладает следующими свойствами:

1. $W(0) = 0$ с вероятностью 1.

2. $W_t = W(t), t > 0$ – процесс с независимыми приращениями.

3. $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$, $s < t$, где $N(0, t-s)$ – нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $t - s$.

4. Траектории процесса W_t – непрерывные функции времени с вероятностью 1.

Поэтому алгоритм моделирования винеровского процесса складывается из следующих шагов:

1. Задается интервал наблюдения (моделирования) процесса от 0 до T.

2. Задается число шагов (точек отсчета) процесса наблюдения за процессом в течение одной реализации процесса (переменная nSteps).

3. Задается число моделируемых траекторий (переменная nPaths).

4. Вычисляется величину шага наблюдения (переменная h= T/ nSteps).

5. Внешний цикл обеспечивает расчет заданного числа траекторий с начальным условием W[0]=0 (с единичным шагом по переменной i).

6. Во внутреннем цикле реализуется основной алгоритм моделирования (по переменной j):

а) моделируется случайное приращение dW как случайное значение N(0;h), которое в свою очередь определяется во вложенном цикле второго уровня с преобразованием значения N(0,1) по формуле (N3).

б) вычисляется точка траектории винеровского процесса как

W[j]= W[j-1]+ dW .   (W1)

Численное моделирование проводилось в системе аналитических вычислений Maple V, версия 4. На рисунке 1 представлен результат работы генератора нормального распределения.

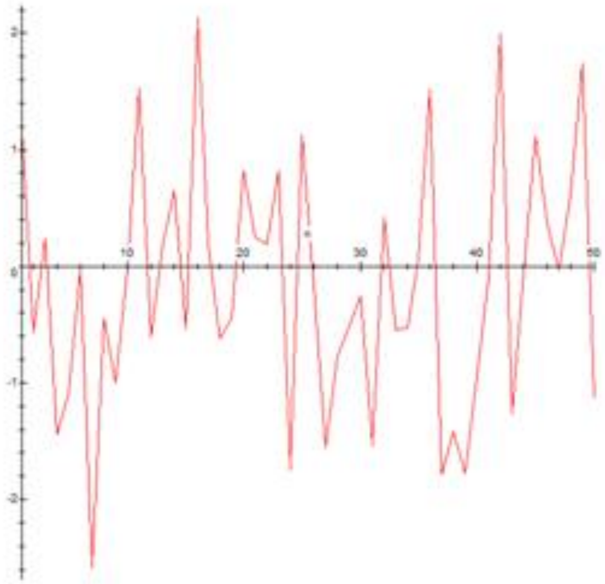

Рисунок 1. Графическое представление результатов работы датчика нормального распределения

На рисунке 2 представлен вид одной из реализаций винеровского процесса, полученной согласно формуле (W1).

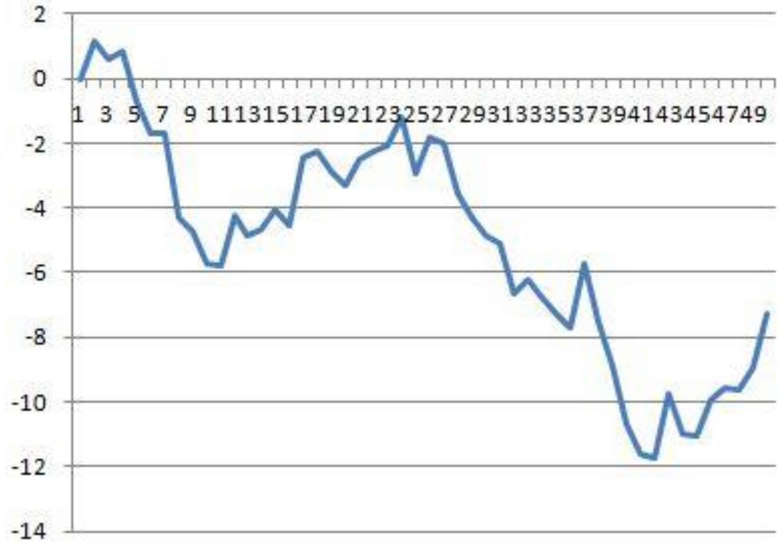

Рисунок 2. График траектории винеровского процесса

Дальнейший этап моделирования связан с использование стохастического дифференциального уравнения, нелинейно связывающего приращения исследуемого процесса, обладающего по сечению релеевским распределением, в приращениями винеровского процесса:

$$dX_t = \left(\sigma^2 - \frac{1}{2}X_t^{\,2}\right)dt + \sigma\sqrt{X_t}\,dW_t \text{ . (СДУ-1)}$$

Это уравнение дает возможность моделировать траектории релеевского случайного марковского диффузионного процесса.

В **Заключении** подводятся выводы по результатам проведенной работы.

ВЫВОДЫ

В первой части работы (главы 1 и 2) методом сопряжения работы построены новые хаотические отображения, обладающие инвариантной плотностью в форме распределения Релея (определенные на полубесконечном интервале): на базе сдвигов Бернулли и на базе пирамидального отображения. В процессе построения отображений, сопряженных названным кусочно-линейным отображениям, были произведены соответствующий выбор сопрягающей функции, расчет области определения отображения, получения аналитического вида нового отображения). Новые отображения могут рассматриваться как новые генераторы псевдослучайных величин, имеющих релеевское распределение на положительном полуинтервале числовой оси. Записаны также аналитические выражения для оператора Перрона-Фробениуса сопряженных отображений и для его собственных функций.

Во второй части работы (главы 3 и 4) разработан метод конструктивного моделирования случайных процессов на базе винеровского процесса. Для этого, прежде всего, построено стационарное уравнение Феллера-Планка-Колмогорова, имеющее точное решение в форме плотности распределения Релея. Из этого уравнения определены коэффициенты сноса и диффузии, которые использованы в свою очередь для записи стохастического дифференциального уравнения, которое управляет случайным процессом, характеризуемым релеевским расперделением в любом его сечении. Данное стохастическое дифференциальное уравнение предложено как основа алгоритма численного моделирования диффузионного процесса с негауссовским (в данном случае – релеевским) распределением.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Аникин В.М., Голубенцев А.Ф.* Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.
2. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. 88 с.
3. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
4. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир, 1984. 528 с.
5. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Курс лекций. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. 296 с.
6. *Grossmann S., Thomae S.* Invariant distributions and stationary correlation functions of one-dimensional discrete processes // Z. Naturforsh. 1997. V. 32a. P. 1353-1363.
7. *Tsuchia T., Szabo A., Saito N.* Exact solutions of simple nonlinear difference equation systems that show chaotic behavior // Z. Naturforsh. 1983. V. 38a. P. 1035-1039.
8. *Lasota A., Mackey M.C.* Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 360 c.
9. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M.* The explicit solutions of Frobenius-Perron equation for the chaotic infinite maps // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1998.V. 8, № 5. P. 1049. DOI: 10.1142/S0218127498000863 2 .
10. *Голубенцев А. Ф., Аникин В. М., Аркадакский С.С.* О некоторых свойствах оператора Фробениуса-Перрона для сдвигов Бернулли // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т.8, №2. С. 67 – 73.
11. *Аникин В.М.* Спектральные задачи для оператора Перрона-Фробениуса // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 4. С. 61-74.
12. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. В 2-х тт. М. : Фазис, 1998. Т. 1. 512 с. Т. 2. 544 с.
13. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М. : Сов. радио, 1961. 558 с.
14. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М. : Сов. радио, 1977. 488 с..

15. *Гихман И.* И. Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 568 с.
16. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М. : Мир, 1987. 400 с.
17. *Портенко Н. И. , Скороход А. В. , Шуренков В. М.* Марковские процессы / Теория вероятностей–4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. М. :ВИНИТИ, 1989. Т. 46, вып. 2. С. 5–245.
18. *Миллер Б. М., Панков А. Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002 . 320 с.
19. *Аникин В.М.* Альберт Эйнштейн и Питирим Сорокин: истории диссертационных защит // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 3. С. 52–76.
20. *Peitgen H.O., Jürgens H., Saupe D.* Chaos and fractals: new frontiers of science. 2nd Edition. New York : Springer Verlag, Inc., 2004. 864 p.
21. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М., Постмаркет, 2000. 352 с.
22. *Fournier D., Fussel D, Carpenter L.* Computer rendering of stochastic models // Comm. of the ACM. 1982. V. 25, № 6. P. 372-384.
23. *Аникин В.М.* Марковские аналитические модели стохастических и хаотических процессов и структур / Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Саратов, 2005. 690 с.
24. *Anikin V.M., Barulina Yu. A., Goloubentsev A.F.* Regression equations modeling diffusion processes // Applied Surface Science. 2003. V. 215, Iss. 1–4. P. 185-–190.
25. *Anikin V. M., Goloubentsev A. F.* Statistical models of fluctuation phenomena in field emission // Solid State Electronics. 2001. Vol. 45, Iss. 6. P. 865–869 .
26. *Аникин В. М., Голубенцев А. Ф.* Статистические модели эмиссионных флуктуаций и надежности автоэмиттерных систем // Радиотехника. 2003. № 2. С. 55-60.
27. *Аникин В.М.* Статистическое описание автоэмиссионных рельефов // Радиотехника. 2005. № 4. С.26–30.
28. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Клименко В.Г.* Статистические модели квазирегулярных радиофизических и оптических структур. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. 116 с.
29. *Goloubentsev A. F., Anikin V. M.* Theoretical estimation of low-frequency noise of a semiconductor field emitter // Radiophysics and Quantum Electronics. 1993. Vol. 36 ,Iss. 9. P.658-660.
30. *Golubentsev A. F., AnikinV. M.* Markov models of emission distortions for matrix cathodes // Revue «Le Vide, les Couches Minces». Paris :1994. Suppl. 271. P.147-150.
31. *Goloubentsev A. F., Anikin V. M.* Theoretical modeling inhomogeneous field emission area // The 9th International Vacuum Microelectronics Conference IVMC'96 (St. Petersburg, Russia, July 1996) : Technical Digest. P. 102–106.

32. *Goloubentsev A. F., Anikin V. M.* Statistical Model of bistable fluctuations in field emission // The 10th Int. Vacuum Microelectronics Conference IVMC'97 (Kyongju, Korea, Aug. 17-21, 1997) : Technical Digest. P. 362-366.
33. *Goloubentsev A. F., Anikin V. M. Sinitsyn N. I.* Potential of Markov emission models in estimation of fluctuations properties of FEA // The 2nd Int. Vacuum Electron Sources Conf. IVESC'98 (Tsukube, Jupan, July 7-10, 1998) : Extended Abstracts. P. 201-203.
34. *Goloubentsev A. F., Anikin V. M.* Theoretical estimations of FEA's reliability // The 11th Int. Vacuum Microelectronics Conf. IVMC'98 (Asheville, North Carolina, USA. July 19-24,1998) : Proceedings. P. 21-22.
35. *Goloubentsev A. F., Anikin V. M.* On the spectrum of fluctuations in the field emission // Proceedings of the Int. University Conference «Electronics and Radiophysics of Ultra-High Frequencies» UHF'99 (St. Petersburg, Russia. May 24-28,1999) / Edited by G.G. Sominski. St. Petersburg : SPbSTU, 1999. P. 304-306.
36. *Goloubentsev A. F., Anikin V. M.* Models of instabilities in field emission // Material Research Society Spring Meeting'99 (April 5-9, 1999, San Francisco, California, USA). Symposium C: Material Issues in Vacuum Microelectronics II : Book of Abstracts. P. 28.
37. *Goloubentsev A. F., Anikin V. M.* Chaotic models of fluctuations in field emission // 2000 IEEE Int. Vacuum Electron Sources Conference (Orlando, Florida, USA, July 10-13, 2000) : Technical Digest. P-22.
38. *Goloubentsev A. F., Anikin V. M.* Statistical model of cathodes with limited emissive resource // The 8th Int. Vacuum Microelectronics Conf. IVMC'95 (Portland, Oregon, USA, July 30 – August 3, 1995) : Technical Digest. Portland: EDS-IEEE, 1995. P. 238– 241.
39. *Anikin V. M.* On statistical description of nonstationary emission processes // 2006 IEEE International Vacuum Electronics Conference held jointly with 2006 IEEE International Vacuum Electron Sources (April 25-27, 2006, Monterey, California, USA) : Proceedings. P. 173-174.
40. *Аникин В. М.* Статистические характеристики нестационарного эмиссионного процесса // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т.14, № 3. С. 70 – 84.
41. *Аникин В.М.* Две задача теории случайных и хаотических процессов (К 80-летию со дня рождения профессора А.Ф. Голубенцева) // Гетеромагнитная микроэлектроника. 2013. № 15. С. 72–77.
42. *Аникин В.М., Муштаков А.В.* Характеристики надежности катода в марковских моделях эмиссионных процессов // Гетеромагнитная микроэлектроника. 2013. № 15. С. 37–50.
43. *Татаренко Н.И., Кравченко В.Ф.* Автоэмиссионные наноструктуры и приборы на их основе. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 192 с.
44. *Мееров И.Б., Сысоев А.В.* Образовательный комплекс «Параллельные численные методы». Н.Новгород, 2011. 33 с.
URL : https://software.intel.com/sites/default/files/m/d/4/1/d/8/LW_SDE_doc.pdf