Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

*Кафедра компьютерной физики
и метаматериалов на базе
Саратовского филиала
Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН*

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И МАРКОВСКИХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА

АВТОРЕФЕРАТ
ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ (МАГИСТЕРСКОЙ) РАБОТА
студента 2 курса 256 группы
направления 03.04.02 «Физика» физического факультета
Овчарова Алексея Анатольевича

Научный руководитель
д.ф.-м.н. профессор ________________________ В.М. Аникин
(подпись, дата)

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. профессор ________________________ В.М. Аникин
(подпись, дата)

Саратов 2020

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуализация работы. При проектировании и эксплуатации радиоэлектронной аппаратуры, включая вычислительную технику, важно знать надёжностные характеристики изделий, дающие представление о продолжительности их безотказной работы и вероятности отказа. Момент отказа является случайной величиной, поэтому рассмотрение проблемы надежности (безотказной работы) ведется в рамках вероятностных представлений; соответственно, математическим аппаратом предсказания и компьютерного моделирования процесса рабочего функционирования изделий и их отказов являются такие дисциплины, как теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных процессов, теория массового обслуживания.

При прогнозировании надежности функционирования изделия и отдельных его компонент исходными параметрами служат данные о проведенных испытаниях с учетом физики и механизмов отказов (например, усталостного разрушения или деградации от физико-химической коррозии) и структуры изделия. В качестве вероятностных распределений, с помощью которых решается проблема моделирования безотказной работы изделий, используется ряд специальных вероятностных распределений:

экспоненциальное с одним параметром, имеющим смысл интенсивности отказов;

распределение Вейбулла, являющееся двухпараметрическим (с параметрами формы и масштаба графика плотности распределения) и позволяющим (в отличие от экспоненциального распределения) подбором значений параметров корректнее соотнести опытные и расчетные данные;

лог-нормальное распределение (двухпараметрическое, логарифм величины распределен по нормальному закону).

При машинном (имитационном) моделирования процесса отказов используются названные вероятностные распределения. Машинный датчик дает равномерно распределенные величины на интервале (0,1). Если функция, определяющая закон распределения, обратима, то по методу обратных функции можно получить представление значение требуемой величины. Применение метода обратных функций возможно для получения датчиков случайных величин с экспоненциальным распределением и распределением Вейбулла. Первая часть работы посвящена моделированию случайных величин, распределенных по экспоненциальному распределению и по закону Вейбулла.

Во второй части работы формулируется стохастическое дифференциальное уравнение, моделирующее случайный диффузионный процесс, сечения которого распределены (в отличие от винеровского процесса) по закону Вейбул- При определенных значениях параметров вебулловского распределения как частный случай получается модель процесса с экспоненциальным распределением.

***Цели выпускной квалификационной работы* (*ВКР*)** :

– разработка датчиков случайной величины, имеющей распределение Вейбулла, на базе хаотических отображений, обладающих инвариантным распределением в форме закона Вейбулла;

– формулировка уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФКП), обладающего точным решением относительно стационарной одномерной плотности;

– конструирование и соотнесенного с уравнением ФКП стохастического дифференциального уравнения, обладающего негауссовским (вейбулловским) распределением по сечению случайного процесса.

Новизна работы. Отличительной особенностью синтезированных отображений является возможность получения выборок значений вейбулловской случайной величины без обращения к машинным датчикам псевдослучайных машинных чисел. Построенные в работе стохастические дифференциальные уравнения позволяют осуществить реализации диффузионного процесса, выражающегося через винеровский процесс, но обладающим негауссовым расперераспределением по сечению.

Соответственно сформулированные уравнения и алгоритмы могут рассматриваться как ***предмет защиты*** ВКР.

Достижение сформулированной цели достигается в процессе решения следующих ***задач***:

– построение хаотических отображений, сопряженных с базовыми хаотическими отображениями, имеющими равномерное инвариантное распределение (построение сопрягающей функции, нахождение подобластей определения нового отображения, точек разрыва итеративных функций, запись аналитического выражения для итеративной функции;

– определение коэффициентов сноса и диффузии для дифференциального уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова, описывающего диффузионный марковский процесс, обладающего аналитическим решением для одномерного распределения в форме вероятностного закона Вейбулла.в форме;

– построение стохастического дифференциального уравнения, позволяющего конструктивным путем выразить приращение негауссова случайного процесса через приращение винеровского процесса, т.е. построить алгоритм моделирования непрерывного случайного процесса, обладающего вейулловским распределением по сечению.

Научно-практическое значение работы. Построение хаотического генератора псевдослучайных величин с распределением Вейбулла позволяет моделировать время жизни различных устройств. Кроме того, наличие параметров в этом отображении заставляет взглянуть на него и с точки зрения построения схем хаотического кодирования – наличие параметров усложняет задачу криптоанализа.

Построенное стохастическое дифференциальное уравнение, управляющее негауссовым диффузионным процессом, может рассматриваться как модель диффузионного процесса, протекающего в физических условиях, отличных от условий диффузии, моделируемой винеровским процессом.

СТРУКТУРА И ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении формулируются аспектные характеристики работы – ее актуальность, цель, задачи, объект и предмет исследования, научная и практическая значимость.

В **главе 1** излагается общий подход к синтезу хаотических отображений с заданной инвариантной плотностью и строятся хаотические датчики псевдослучайных величин с экспоненциальным вероятностным распределением как частным случаем распределения Вейбулла.

В **главе 2** строятся датчики псевдослучайных величин для общего вида распределения Вейбулла. Охарактеризована роль распределения Вейбулла в теории надежности. Показано, какие замены нужно произвести в исходных хаотических отображениях с равномерным инвариантным распределением, чтобы получить отображения, обладающие вейбулловским законом распределения. Для двух видов исходного отображения – двоичного сдвига Бернулли и пирамидального отображения – построены сопряженные отображения с инвариантным вейбулловским распределением. Считается, что случайная величина X распределена по закону Вейбулла, если ее плотность распределения и закон распределения представляются в виде:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k}}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}\quad F(x)=\int_0^x f(t)dt=1-e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k}},\ x\geq 0$$

Здесь k – параметр формы кривой распределения; λ – параметр масштаба кривой распределения.

Аналитическое выражение для итеративной функции нового отображения и ее график приведены ниже. Вид итеративной функции для случая $\lambda=1, k=2$ показан на рисунке 1. Отображение для этих значений параметров имеет вид:

$$x_{n+1}=\begin{cases}\sqrt{-\ln(2e^{-x_n^2}-1)}, & 0\leq x_n\leq\sqrt{\ln 2};\\ \sqrt{-\ln(1-2e^{-x_n^2})}, & \sqrt{\ln 2}\leq x_n<\infty;\end{cases}=\sqrt{-\ln|2e^{-x_n^2}-1|}, 0\leq x_n\leq\infty. \quad (1)$$

Точка $x^*=\lambda(\ln 2)^{1/k}$ является точкой разрыва второго рода.

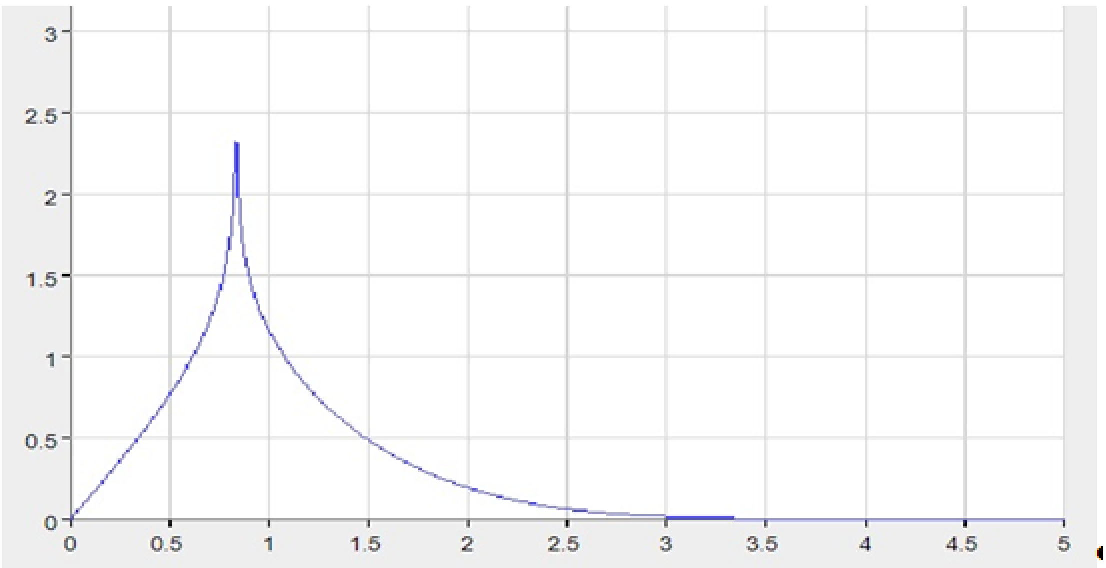

Рисунок 1. Отображение (1) с инвариантной плотностью

в форме закона Вейбулла для значений параметров $\lambda = 1, k = 2$

В главе 3 приведено решение спектральной задачи для оператора Перрона-Фробениуса отображения с инвариантной плотностью в форме закона Вейбулла, сопряженного со сдвигом Бернулли и аналогичное решение спектральной задачи для оператора Перрона-Фробениуса отображения, сопряженного с пирамидальным отображением

В **главе 4** проводится моделирование ***случайного марковского диффузионного процесса***, характеризуемого в отличие от винеровского процесса распределением Вейбулла по сечениям процесса. Построены соответствующее уравнение Фоккера-Планка=Колмогорова, обладающего стационарным решением в виде (одномерного) распределения Вейбулла, а также соотнесенное с этим уравнением стохастическое дифференциальное уравнение, позволяющее моделировать конструктивно негауссовский диффузионный процесс через винеровский процесс, определяемы гауссовы распределением по его сечениям.

Стационарное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова относительно одномерной плотности вероятности диффузионного процесса в форме закона Релея, имеет вид:

$$\lambda^k \frac{\partial}{\partial x}\left(x\, p_{st}(x)\right) - k(\lambda^k - x^2)\, p_{st}(x) = 0. \quad (4.5)$$

Соответственно, стохастическое дифференциальное уравнение (в форме Ито), управляющее случайным процессом с одномерной стационарной плотностью в форме закона Вейбулла, записывается как

$$dX_t = \frac{1}{2} k\left(\lambda^k - X_t^{\ 2}\right) dt + \sqrt{\lambda^k X_t}\, dW_t. \quad (2)$$

Это уравнение дает возможность моделировать траектории вейбулловского случайного марковского диффузионного процесса.

Для $k = 1$ и $\lambda = 1/\alpha$ распределение Вейбулла определяет экспоненциальный закон распределения:

$$p_{st}=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x^k}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

В случае экпоненциального распределение уравнение (2) принимает вид:

$$dX_t=\frac{1}{2}\left(\lambda-X_t^{\ 2}\right)dt+\sqrt{\lambda X_t}\,dW_t \quad \lambda=1/\alpha\,.\ (4.7)$$

Таким образом, моделирование негауссовских диффузионных процессов определяется нелинейными преобразования приращений винеровского процесса.

Компьютерное моделирование винеровского процесса основано на его определении:

$$\{W(0)=0;\quad M\{W(t)\}=0\};$$

$$P(\Delta w(t,s))=N(0,\sigma^2\,|\,t-s\,|)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\,|\,t-s\,|}}\exp\left(-\frac{(\Delta w(t,s))^2}{2\sigma^2\,|\,t-s\,|}\right);$$

$$W(t+\Delta t)=W(t)+N(0,\sigma^2\,|\,\Delta t\,|)\,.$$

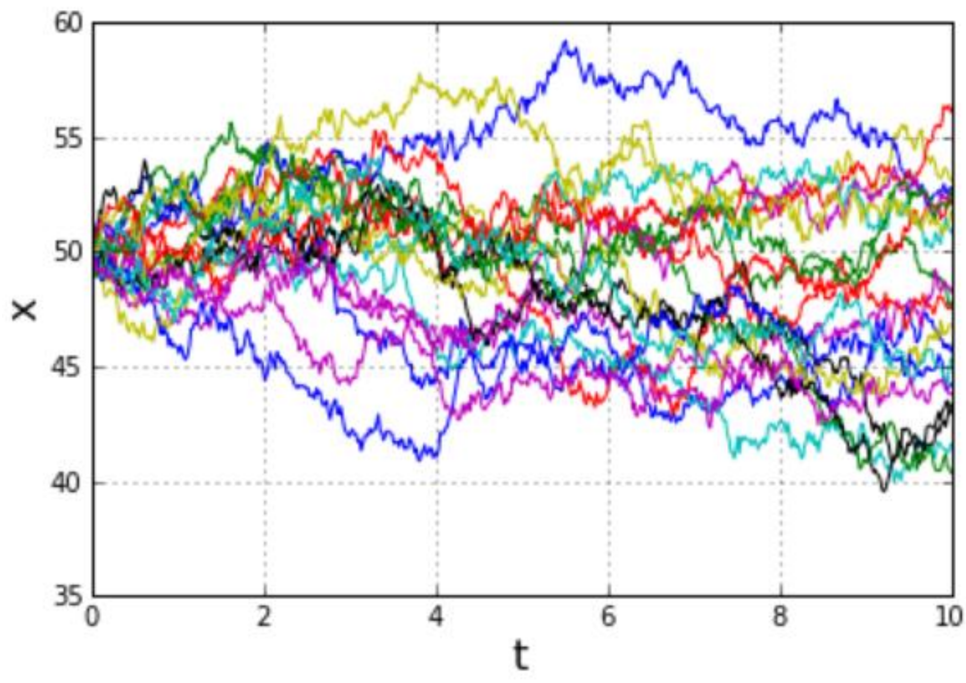

Рисунок 2. Набор реализаций винеровского процесса

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

В работе изложены результаты конструирования датчиков случайных величин и случайных процессов, характеризуемых релеевским распределением (для процессов – по сечениям).

Датчики строятся на базе хаотических отображений посредством сопряжения с кусочно-линейными отображениями в равномерным инвариантным распределением. Идея топологического сопряжения открывает перспективу построения новых нелинейных хаотических генераторов с разнообразными статистическими характеристиками – различными точными инвариантными плотностями, гладкими или разрывными итеративными функциями, различными по значению ляпуновскими показателями. В качестве новых отображений рассмотрены отображения, обладающие инвариантной плотность в виде распределения Вейбулла и, в частном случае, - экспоненциальным распределением. Вид отображения с заданной инвариантной плотностью зависит от вида базового отображения, другими словами, каждым базовым отображением можно связать разнообразные сопряжённые хаотические отображения.

Построено два типа сопряженных отображений – на базе сдвигов Бернулли и на базе пирамидального отображения. Были произведены соответствующий выбор сопрягающей функции, расчет области определения отображения, получения аналитического вида нового отображения. Инвариантность показателя Ляпунова для сопряженных отображений предопределяет появления топологических "клонов" (таковыми могут быть и разнообразные эргодические отображения с нулевым показателем Ляпунова, порожденные дробно-линейным отображением).

К общим свойствам сопряженных отображений, независимо от использованного базового отображения, заключаются в возможности записи оператора Перрона-Фробениуса по единому правилу и определения собственных чисел и собственных функций оператора по характеристикам оператора Перрона-Фробениуса базового отображения. В работе записаны аналитические выражения для собственных функций операторов новых отображений.

Полученные отображения могут рассматриваться как новые генераторы псевдослучайных величин, имеющих релеевское распределение на положительном полуинтервале числовой оси и использоваться при моделировании надёжностных задач и задач криптографии.

Для моделирования диффузионных (непрерывных) процессов предложено использовать стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), управляющие случайными процессами с заданным распределением значений случайных реализаций по сечениям.

Приращения в новых моделях стационарных случайных процессов определяется через нормально распределенные приращения винеровского (броуновского) процесса с использованием коэффициентов, найденных из соотнесенных с СДУ дифференциальных уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова. Первоначально строятся уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) относительно одномерной и переходной вероятностей марковского процесса, исходя из того, что точным решением уравнения ФПК будут заданные (в нашем случае – релеевское и экспоненциальное) распределения. Методика построения уравнения ФПК имеет общий характер и может быть применена к конструированию новых уравнений ФПК, имеющих иные точные решения в форме вероятностных распределений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Аникин В.М., Голубенцев А.Ф.* Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.

2. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. – 88 с.

3. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Курс лекций. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. 296 с.

4. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. – М. : Мир, 1984. 528 с.

5. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М. : Мир, 1988. 240 с.

6. *Lasota A., Mackey M.C.* Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 360 c.

7. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация. М. : Мир, 1969. 239 с.

8. *Гласс Л.,Мэки М.* От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.:Мир, 1991. 248с.

9. *Кнут Д. Э.* Искусство программирования. В 3т. Т.2: Получисленные алгоритмы. 3-е изд. – М.: Вильямс, 2000.-832 с.

10. *Weibull W.* A statistical distribution function of wide applicability", J. Appl. Mech.-Trans. ASME. 1951. Vol. 18, no. 3. Pp. 293–297.

11. *Dobson B.* The Weibull analysis handbook. ASQ Quality Press, 2006. 167 p.

12. *Rinne H.* The Weibull distribution. A Handbook. CRC Press, 2009. 762 p.
13. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. В 2-х тт. М. : Фазис, 1998. Т. 1. 512 с. Т. 2. 544 с.
14. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М. : Сов. радио, 1961. 558 с.
15. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М. : Сов. радио, 1977. 488 с..
16. *Гихман И.* И. Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 568 с
17. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М. : Мир, 1987. 400 с.
18. *Портенко Н. И. , Скороход А. В. , Шуренков В. М.* Марковские процессы / Теория вероятностей–4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. М. :ВИНИТИ, 1989. Т. 46, вып. 2. С. 5–245.
19. *Миллер Б. М., Панков А. Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002 . 320 с.