

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.  
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Процессы синхронизации в системе связанных ансамблей,  
составленных из парциальных неидентичных хаотических  
осцилляторов**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 241 группы  
направления 03.04.03 «Радиофизика»  
физического факультета  
Рыбаловой Елены Владиславовны

Научный руководитель

зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ Анищенко В.С.

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ Анищенко В.С.

г. Саратов — 2020

## ВВЕДЕНИЕ

Процессы самоорганизации и образования структур в больших ансамблях нелинейных элементов изучаются в течении многих лет, но этот круг проблем не теряет своей актуальности <sup>1</sup>. В ансамблях нелинейных элементов с нелокальными связями типичным явлением становится формирование сложных кластерных структур, получивших название химер <sup>23</sup>.

Особенности взаимодействия нескольких ансамблей, демонстрирующих сложные режимы и структуры, вызывает большой интерес в связи с задачами моделирования, возникающими во многих областях науки и техники. В качестве моделей сложных сетей часто выступают системы, состоящие из многих взаимодействующих подсистем (ансамблей или слоев), такие как multiplex networks и multilayer networks, в которых взаимодействие слоев приводит к различным эффектам синхронизации <sup>4</sup>. Отдельные слои сети, могут демонстрировать сложное пространственно-временное поведение, что приводит к задаче изучения взаимодействия ансамблей со сложными пространственными структурами, такими как химеры. Явление синхронизации регулярных и хаотических пространственных структур во взаимодействующих распределенных системах и средах известно достаточно давно. При этом парциальные ансамбли могут отличаться по параметрам и даже быть составленными из различных элементов, а связь может быть, как однонаправленной, так и взаимной.

Недавно, один из типов синхронизации в многослойных системах привлек внимание исследователей – удаленная (relay, remote) синхронизация. Данная синхронизация имеет место между двумя элементами (точками, ансамблями) сети, которые не связаны друг с другом напрямую, а через некое «реле» (промежуточный слой). Удаленная синхронизация впервые была описана, как одна из особенностей сетей в форме «звезды» (star-like network)<sup>5</sup>.

---

<sup>1</sup>Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. – Springer-Verlag, Berlin, 1984.

<sup>2</sup>Kuramoto Y., Battogtokh D., Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators //Nonlinear Phenom. Complex Syst. – 2002. – V.4. – P. 380-385.

<sup>3</sup>Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators //Physical review letters. – 2004. – V. 93. – №. 17. – P. 174102.

<sup>4</sup>Boccaletti S. et al. Complex networks: Structure and dynamics //Physics reports. – 2006. – V. 424. – №. 4-5. – P. 175-308.

<sup>5</sup>Ma Z. et al. Cluster synchronization in star-like complex networks //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2008. – V. 41. – №. 15. – P. 155101.

Изучение эффектов удаленной синхронизации важно для понимания передачи информации в мозге <sup>6</sup>. Последние исследования направлены на изучения удаленной синхронизации в многослойных сетях <sup>78</sup>, где отдельные слои могут быть составлены из элементов с дискретным и потоковым временем и демонстрировать сложные пространственно-временные структуры, включая химерные. Однако, данный тип синхронизации был рассмотрен только в сетях с одним типом парциальных элементов во всех слоях. В первой главе дипломной работы мы изучаем динамику трехслойной системы, в которой передающий слой отличается от внешних типом парциальных элементов.

Очевидно, синхронизация сложных пространственных структур будет иметь место не только при взаимодействии двух или трех ансамблей, но также и в случае сети, составленной из множества слоев. Пример вынужденной синхронизации в режиме химерной структуры в сети хаотических отображений, составленной из большого числа слоев с однонаправленным взаимодействием был исследован в <sup>9</sup>. В данной статье характер внутрислойной и межслойной связей полагался однотипным, а слои – составленными из идентичных элементов с идентичными нелокальными связями. В реальных сложных сетях слои не могут быть полностью идентичны, а связь обычно является в определенной степени взаимной. Во второй главе дипломной работы, мы расширяем результаты представленные в работе <sup>9</sup> на гетерогенную сеть с обратной связью.

**Целью** данной выпускной квалификационной работы было изучить более детально и расширить понимание процессов синхронизации в системах связанных ансамблей хаотических неидентичных парциальных элементов с дискретным временем.

Для достижения данной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Исследовать возможность удаленной и полной синхронизации в системе

---

<sup>6</sup>Guillery R. W., Sherman S. M. Thalamic relay functions and their role in corticocortical communication: generalizations from the visual system //Neuron. – 2002. – V. 33. – №. 2. – P. 163-175.

<sup>7</sup>Sawicki J. et al. Chimeras in multiplex networks: interplay of inter-and intra-layer delays //Frontiers in Applied Mathematics and Statistics. – 2019. – V. 5. – P. 19.

<sup>8</sup>Leyva I. et al. Relay synchronization in multiplex networks //Scientific reports. – 2018. – V. 8. – №. 1. – P. 1-11.

<sup>9</sup>Strelkova G. I., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S. Synchronization of chimera states in a network of many unidirectionally coupled layers of discrete maps //Regular and Chaotic Dynamics. – 2018. – V. 23. – №. 7-8. – P. 948-960.

трех слоев с различными типами парциальных элементов;

2. Исследовать эффекты вынужденной синхронизации в многослойной неоднородной системе.

Для выполнения всех поставленных задач были написаны программы на языке программирования С для моделирование динамики систем и вычисления необходимых характеристик. В том числе была использована программа gnuplot для построения всех графиков и для исследование эволюции пространственных структур слоев при изменении параметров системы.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. В трехслойной системе, в которой передающий слой отличается типом парциальных элементов от внешних, возможна удаленная синхронизация сложных пространственно-временных структур, в том числе химерных режимов и режимов уединенных состояний. В некоторой области параметров связи элементов возможна и полная синхронизация слоев.

2. В многослойной неоднородной сети хаотических элементов возможна вынужденной синхронизации (ретрансляции) химерных структур. При этом фазовые и амплитудные химеры имеют различный порог синхронизации (фазовая химера синхронизируется при меньших значениях силы связи).

3. Введение неоднородности в параметры сети введет к невозможности вынужденной синхронизации. Тот же эффект проявляется при введении обратной связи в сеть.

Данная работа включает в себя введение (3-5 стр), две главы главы: «Удаленная (relay) синхронизации в системе трех связанных колец, состоящих из отображений с разным типом хаотического аттрактора» (6-22 стр) с подпунктами «Модель изучаемой системы» (6-12 стр), «Система Эно-Лози-Эно» (12-17 стр), «Система Лози-Эно-Лози» (17-22 стр); «Вынужденная синхронизация сложной неоднородной сети в режиме химерной структуры» (23-44 стр), включающая в себя четыре подпункта «Модель сложной сети и методы ее исследования» (23-28 стр), «Случай слабой неоднородности при однонаправленном взаимодействии всех слоев» (29-36 стр), «Влияние степени неоднородности слоев» (36-40 стр), «Влияние обратной связи» (40-44 стр); заключение (45-47 стр) и список использованных источников (48-53 стр).

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава диплома посвящена изучению синхронизация в гетерогенной системе трех поэлементно связанных колец (т.е. каждый  $i$ -ый элемент одного кольца связан с  $i$ -ым элементом другого), где передающий слой качественно отличается от внешних. В качестве парциальных элементов были взяты отображения Эно и Лози, при данных парциальных элементах в системах могут наблюдаться химерные и уединенные состояния, соответственно. Мы показали возможность синхронизации химерных и уединенных состояний во внешних слоях, без синхронизации с передающим слоем (эффект удаленной синхронизации).

Математическая модель системы, исследуемой во второй главе выпускной работы  $x_i^m(n+1) = f_x(x_i^m(n), y_i^m(n)) + \frac{\sigma_m}{2R^m} \sum_{j=i-R^m}^{i+R^m} [f_x(x_j^m(n), y_j^m(n)) - f_x(x_i^m(n), y_i^m(n))] + \sum_{l=1}^3 \gamma^{ml} [f_x(x_i^l(n), y_i^l(n)) - f_x(x_i^m(n), y_i^m(n))]$ ,  $y_i^m(n+1) = f_y(x_i^m(n), y_i^m(n))$ , где  $m = 1, 2, 3$  – номер слоя,  $i = 1, 2, \dots, N$  – номер парциального элемента в слое,  $N = 1000$  – общее количество элементов в каждом слое,  $\sigma_m$  – сила связи между элементами (сила внутрислойной связи) и  $R^m$  – радиус связи (количество элементов, с которыми связан  $i$ -ый элемент справа и слева) в соответствующем кольце. Функции  $f_x$  и  $f_y$  – правые части, используемых отображений.  $\gamma^{ml}$  – сила связи между парциальными элементами соответствующих слоев  $m$  и  $l$  (сила межслойной связи). Мы берем полностью идентичную связь между слоями, т.е.  $\gamma^{21} = \gamma^{12} = \gamma^{23} = \gamma^{32} = \gamma$ . В нашем исследовании мы связывали кольца между собой только после того, как в каждом из колец закончится переходный процесс и установится стабильный режим. Рассматривалась система как с передающим слоем, состоящим из отображений Лози, и внешними слоями – Эно (система Эно-Лози-Эно), так и наоборот (система Лози-Эно-Лози).

Для анализа степени синхронизации использовалась локальная среднеквадратичная разность:  $\delta_i^{ml} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T (x_i^m(n) - x_i^l(n))^2$ . И глобальная среднеквадратичная разностью:  $\delta^{ml} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T (x_i^m(n) - x_i^l(n))^2 \right)$ . В нашей работе мы говорим, что слои  $m$  и  $l$  синхронизированы, если выполняется следующее условие  $\delta^{ml} < 0.005$ ,  $\delta_i^{ml} < 0.005$ .

Сначала в дипломной работе рассматривалась система Эно-Лози-Эно. Как мы можем видеть из рисунка 1(а), полная синхронизация может наблюдаться в относительно небольшой области, по параметру внутрислойной связи передающего слоя она наблюдается в области  $\sigma_2 \in [0.22; 0.48]$  и характеризуется конечной шириной по параметру межслойной связи  $\gamma$ , которая зависит от  $\sigma_2$ . Значение  $\sigma_2 = 0.22$  лежит близко к границе между когерентным режимом колебаний и режимом уединенных состояний в отдельно взятом кольце нелокально связанных отображений Лози. Можно сделать вывод, что некогерентное поведение в передающем слое не мешает удаленной синхронизации, а препятствует только полной. Отметим, что минимальное значение силы связи между слоями  $\gamma$ , при которой наблюдается удаленная синхронизация, почти не зависит от характера динамики в передающем кольце (параметра  $\sigma_2$ ). И как мы можем видеть, для любого значения силы связи между элементами в передающем кольце возможна удаленная синхронизация химерных структур.

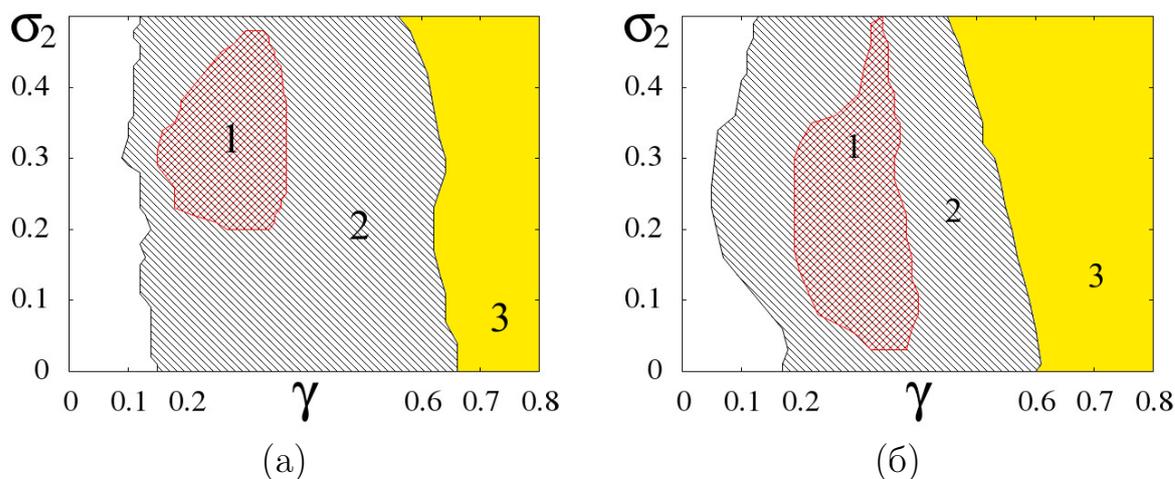


Рисунок 1 – Области наблюдения синхронизации и рассинхронизации в системе (а) Эно-Лози-Эно и (б) Лози-Эно-Лози на плоскости параметров  $(\gamma, \sigma_2)$ . Белая область соответствует рассинхронизации слоев, красная заштрихованная область 1 соответствует полной синхронизации ( $\delta^{ml} < 0.005$ ), черная заштрихованная область – удаленная синхронизация ( $\delta^{13} < 0.005$ ,  $\delta^{23} > 0.005$ ,  $\delta^{13} > 0.005$ ), желтая область – уход на бесконечность систем. Остальные параметры:  $N = 1000$ ,  $R = 320$ , (а)  $\sigma_1 = \sigma_3 = 0.31$ ,  $\sigma_2 = 0.14$ , (б)  $\sigma_1 = \sigma_3 = 0.18$ ,  $\sigma_2 = 0.13$ . Границы построены по трем случайным начальным условиям в слоях.

Далее была рассмотрена динамика трехслойной сети Лози-Эно-Лози. На рисунке 1(б) представлена двумерная диаграмма, демонстрирующая области удаленной (черная штриховка) и полной синхронизаций (красная штриховка). В отличие от предыдущей системы, в данном случае левая граница удаленной синхронизации по параметру силы связи между слоями зависит от силы связи между элементами в передающем кольце в области  $[0 : 0.15]$ , а далее почти не меняется при изменении  $\sigma_2$  в промежутке  $[0.15 : 0.3]$ . Отметим еще одно отличие – в системе Лози-Эно-Лози полная синхронизация колец наблюдается почти для нулевого значения силы связи между элементами второго кольца, т.е. при полной рассинхронизации элементов в передающем кольце. В данной системе в отличие от прошлого случая синхронизация химерных структур возможна только при  $\sigma_2 > 0.08$ . При этом химерные структуры в одиночном передающем кольце (при  $\gamma = 0$ ) наблюдаются только при  $0.37 < \sigma_2 < 0.45$ , т.е. связь между кольцами индуцирует химерные структуры в системе.

Во второй главе дипломной работы описаны результаты исследования вынужденной синхронизации в многослойной гетерогенной (неоднородной) сети в режиме сложных пространственно-временных структур. Рассматривается ретрансляция (вынужденная синхронизация) химерной структуры главного слоя вдоль последующих слоев и изучаются особенности вынужденной синхронизации в зависимости от характера и степени неоднородности сети, а также от степени асимметрии межслойной связи. Для анализа степени синхронизации используется средний квадрат разности мгновенных значений амплитуд парциальных элементов слоев, при этом все пространство управляющего слоя делится на кластеры с разной динамикой и квадрат разности ищется отдельно для каждой структуры. Это позволяет показать разницу между ретрансляцией фазовых и амплитудных химер.

Исследуемая многослойная система описывается следующими уравнениями  $x_{ji}(n+1) = f_{ji}(n) + \frac{\sigma_i}{2P_i} \sum_{k=j-P_i}^{j+P_i} [f_{ki}(n) - f_{ji}(n)] + \gamma_i [f_{ji-1}(n) - f_{ji}(n)] + g_i [f_{ji+1}(n) - f_{ji}(n)]$ ,  $f_{ji}(n) = f(x_{ji}(n), \alpha_i)$ ,  $x_{j\pm Ni}(n) = x_{ji}(n)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $i = 0, 1, \dots, M$ , где  $i = 0, 1, \dots, M$  – номер слоя,  $j = 1, 2, \dots, N = 1000$  – номер элемента в слое,  $x_{ji}$  – динамические переменные, задающие

мгновенные состояния элементов системы,  $n$  – дискретное время. В работе полагается  $M = 19$ , т.е., с учетом нулевого слоя исследуется сеть из 20 слоев. Каждый слой представляет собой кольцо элементов, динамика которых описывается логистическим отображением. Для каждого элемента в  $i$ -ом слое связь осуществляется с  $P_i$  элементами этого же слоя с каждой стороны и характеризуется силой связи  $\sigma_i$ . В проведенных исследованиях параметры отображений и связи в каждом слое полагались одинаковыми ( $\alpha_i, \sigma_i, P_i$  для  $i$ -го слоя), однако для разных слоев они могли быть различными, что обеспечивало неоднородность сети.

Параметры системы:  $\alpha_i = \alpha_0 + \xi_{\alpha i} \Delta\alpha$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ ;  $\sigma_i = \sigma_0 + \xi_{\sigma i} \Delta\sigma$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ ;  $g_i = g_1 + \xi_{g i} \Delta g$ ,  $i = 2, 3, \dots, M - 1$ ;  $\gamma_i = \gamma_2$ ,  $i = 2$ ,  $= \gamma_2 + \xi_{\gamma i} \Delta\gamma$ ,  $i = 3, 4, \dots, M - 1$ ;  $\gamma_0 = 0$ ,  $g_0 = 0$ ,  $g_M = 0$ , где  $\xi_{\alpha i}, \xi_{\sigma i}, \xi_{g i}, \xi_{\gamma i}$  некоррелированные случайные числа, равномерно распределенные в интервале  $[-0.5, 0.5]$ , величины  $\Delta\alpha, \Delta\sigma, \Delta g, \Delta\gamma$  задают разброс параметров в различных слоях сети. Все выборки случайных чисел  $\xi_{\alpha i}, \xi_{\sigma i}, \xi_{g i}, \xi_{\gamma i}$  фиксировались и при проведении численных экспериментов не менялись.

Было выбрано значение параметра  $\alpha_0$ , соответствующее хаотической динамике отдельно взятого отображения:  $\alpha_0 = 3.8$ , а параметры связи  $\sigma_0 = 0.32$ ,  $r_0 = 0.32$ , соответствующие возможности реализации химерных состояний в невзаимодействующих слоях. Начальные состояния всех слоев многослойной сети были выбраны случайным образом в интервале  $[0; 1]$ . Для нулевого (задающего) слоя были выбраны и зафиксированы начальные условия, соответствующие установлению в этом слое комбинированного химерного состояния, содержащего кластеры некогерентности, как фазового, так и амплитудного типа.

Сначала рассматривается система при наличии только однонаправленного взаимодействия слоев ( $g_i = 0$ ). Кроме того:  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ . Исследуется слабо неоднородную сеть, положив  $\Delta\alpha = \Delta\gamma = \Delta\sigma = 0.001$ .

Для более точной диагностики синхронизации различных слоев рассчитывался максимальный средний квадрат разности состояний  $\delta_i$ . На основании этих расчетов была построена диаграмма синхронных и несинхронных режимов в разных слоях сети при изменении коэффициента связи  $\gamma$ . Она приведена на рисунке 2,а.

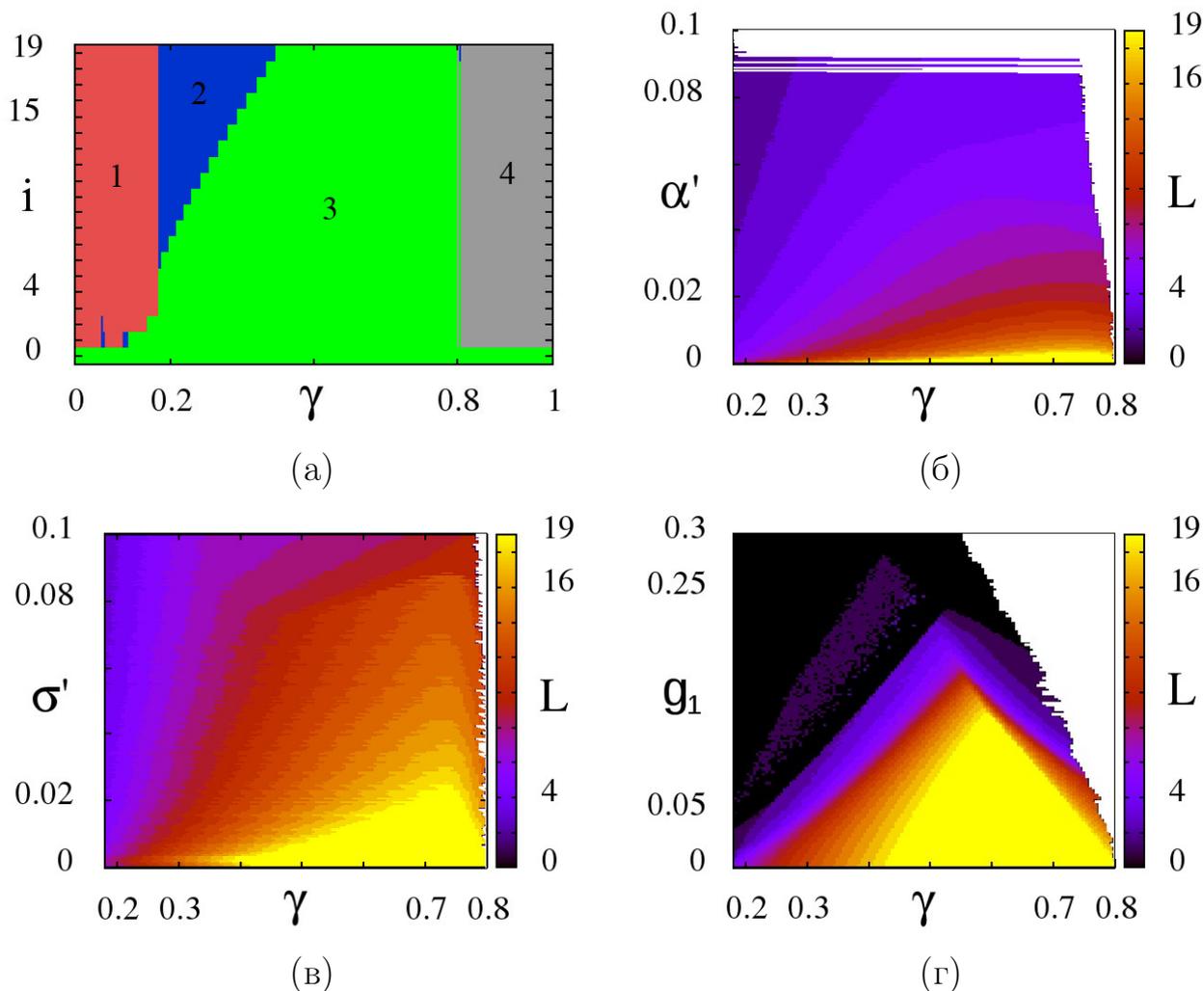


Рисунок 2 – (а) Диаграмма синхронных и несинхронных режимов в сети (??) с однонаправленной связью при вариации параметра  $\gamma$ : область 1 – отсутствие вынужденной синхронизации слоев с задающим слоем; область 2 – вынужденная синхронизация кластеров фазовой химеры; область 3 – синхронизация всех элементов слоя с задающей структурой; 4 – уход на бесконечность. Параметры сети:  $\Delta\alpha = \Delta\gamma = \Delta\sigma = 0.001$ ;  $g_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, M$ . (б)-(г) Двумерная диаграмма, показывающая цветом максимальное количество полностью синхронизированных слоев в зависимости от (б) степени неоднородности параметров  $\alpha_i$  и силы связи между слоями  $\gamma$  ( $\Delta\gamma = \Delta\sigma = 0.001$ ;  $g_i = 0$  (для всех  $i$ )); (в) степени неоднородности параметров  $\sigma_i$  и силы связи между слоями  $\gamma$  ( $\Delta\alpha = \Delta\gamma = 0.001$ ;  $g_i = 0$  (для всех  $i$ )); (г) прямой связи между слоями  $\gamma$  и обратной связи  $g_1$ . Белым выделена область ухода на бесконечность системы. Параметры сети:  $\Delta\alpha = \Delta\gamma = \Delta\sigma = 0.001$ . (а)-(г) Остальные параметры:  $\alpha_0 = 3.8$ ;  $\sigma_0 = 0.32$ ;  $r_0 = 0.32$

Диаграмма режимов четко отражает разницу между поведением элементов в областях, соответствующих фазовой и амплитудной химерам в задающем слое. Отметим также присутствие на диаграмме маленького изолированного участка области 2, расположенного в окрестности значения  $\gamma = 0.005$  (внутри области 1). Этот участок диаграммы соответствует эффекту «первоначальной синхронизации». В данном режиме синхронизируется только скелет режима в задающем слое. Эффект «первоначальной синхронизации» наблюдается в очень узком интервале значений параметра  $\gamma$ , и при его дальнейшем увеличении резко исчезает. Можно предположить, что причина появления и исчезновения «первоначальной синхронизации» при слабом взаимодействии слоев определенным образом связана со сдвигом эффективных значений параметров  $\alpha$  и  $\sigma$ .

Далее анализируются влияния неоднородности на возможность вынужденной синхронизации сети. Сначала исследуется влияние степени и характера неоднородности слоев в случае однонаправленной связи ( $g_i = 0$  для любого  $i$ ). Рассматривается, как влияет на поведение сети неоднородность значений параметров  $\alpha_i$ , управляющих динамикой элементов. На рисунке 2(б) приведена двумерная диаграмма зависимости числа слоев полностью синхронизированных с задающим слоем ( $L$ ) от силы связи между слоями  $\gamma$  и относительной неоднородности в слоях по параметру  $\alpha$ :  $\alpha' = \Delta\alpha/\alpha_0$ . Можно видеть, что полная синхронизация всех слоев наблюдается только при малой относительной неоднородности. Так же вводится неоднородность в коэффициенты внутрислойной связи  $\sigma_i$ . Чтобы можно было сравнивать результаты при анализе влияния различных неоднородностей сопоставляются относительные величины разброса параметров. Поэтому на рисунке 2(в) приведена двумерная диаграмма зависимости числа слоев полностью синхронизированных с задающим слоем от силы связи между слоями  $\gamma$  и относительной неоднородности в слоях по параметру  $\sigma$ :  $\sigma' = \Delta\sigma/\sigma_0$  в тех же пределах, что и диаграмма на рисунке 2(б). С ростом  $\Delta\sigma$  исчезновение режима полной синхронизации всех 19 слоев наблюдается при  $\Delta\sigma = 0.007$ . Соответствующее относительное значение разброса коэффициентов внутрислойной связи есть  $\Delta\sigma/\sigma_0 = 0.021875$ . Относительный разброс параметров  $\alpha_i$ , приводящий к тому же эффекту, существенно меньше ( $\Delta\alpha/\alpha_0 = 0.002105$ ).

В последнем пункте второй главы исследуется влияние обратной связи, т.е. влияния верхних слоев на нижние, в сети со слабой неоднородностью слоев. Рисунок 2(г) демонстрирует, как изменяется число слоев синхронизированных с задающим слоем от изменения прямой связи между слоями  $\gamma$  и обратной связи  $g_1$ . Видно, что с увеличением обратной связи не только уменьшается область по параметру  $\gamma$ , в которой наблюдается максимально возможное количество синхронизированных слоев, но и увеличивается область ухода на бесконечность системы. При  $g_1 > 0.29$  полная синхронизация не наблюдается даже в первом слое. При этом существует некоторый интервал оптимальных значений коэффициента однонаправленной связи  $\gamma$ , для которых полная синхронизация наблюдается в максимальном числе слоев.

Достаточно очевидно, что наличие обратной связи между слоями сети препятствует вынужденной синхронизации, поскольку приводит к взаимной синхронизации первого и последующих слоев, структуры которых будут одинаковы и отличны от структуры в задающем слое. Если взаимная связь велика, то воздействие со стороны задающего слоя будет стремиться синхронизировать все остальные слои одновременно, как единое целое. При достаточно большом количестве слоев, для их вынужденной синхронизации потребуется очень сильное воздействие. В рассматриваемой модели на базе логистических отображений такое воздействие приводит к уходу траекторий на бесконечность и наблюдать синхронизацию всех  $M = 19$  слоев сети невозможно.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе представлены результаты по моделированию многослойных систем и анализу эффектов синхронизации сложный пространственно-временных структур. В работе изучено два типа синхронизации – удаленная и вынужденная (ретрансляционная) синхронизация, особое место уделено синхронизации химерных структур.

В первой главе представлены результаты численного моделирования эффектов полной и удаленной синхронизации в многослойной гетерогенной системе трех связанных ансамблей хаотических двумерных осцилляторов. Каждый из трех ансамблей представляет собой одномерное кольцо (слой) некогерентно связанных хаотических отображений. В первом случае в качестве индивидуальных осцилляторов управляющего кольца выбирались отображения Лози. Внешние два кольца были идентичны и составлены из отображений Эно. Режимы индивидуальных осцилляторов всех трех колец в отсутствие связей выбирались хаотические. Исследован также случай, когда управляющий слой содержал отображения Эно, а два внешних – отображения Лози. Исследование двух этих систем позволило нам найти различия и сходства в динамике систем с различным типом передающего и внешних слоев. Было показано, что передающий слой играет отличительную роль в эффектах удаленной синхронизации, он влияет на границы полной и удаленной синхронизаций. Так в случае передающего слоя Лози, наблюдение полной синхронизации возможно только в том случае, если в передающем слое отсутствуют уединенные выбросы. Показана возможность полной и удаленной синхронизации фазовых, амплитудных химер и химер уединенных состояний, и режима уединенных состояний.

Проведенные исследования во второй показали возможности ретрансляции сложной пространственной структуры в сети из многих слоев в присутствии неоднородностей и обратной связи (влияния последующих слоев на предыдущие). При условии слабой неоднородности и слабой обратной связи эффективная вынужденная синхронизация позволяет передать задающую структуру во все слои сети с минимальными изменениями. Следует отметить, что одинаковая по величине неоднородность различных параметров сети, по-разному влияет на возможности вынужденной синхронизации. Однако са-

мым существенным препятствием для глобальной синхронизации всех слоев сети является наличие обратной компоненты взаимодействия. В случае сильной взаимной (пусть и не симметричной) связи слоев вся сеть становится единой системой, и ее вынужденная синхронизация требует очень сильного воздействия. Если взаимная связь не так велика, то возможна вынужденная синхронизация некоторого кластера из определенного числа слоев сети. Число этих слоев зависит от соотношения коэффициентов обратной и прямой связи слоев (в статье  $g/\gamma$ ). Для синхронизации сети из большого числа слоев, это отношение должно быть очень мало.

Интересным, обнаруженным нами эффектом вынужденной синхронизации в режиме сложной пространственной структуры является различие в порогах синхронизации для различных кластеров задающей структуры. Эти различия в синхронизации для различных кластеров оказались существенно зависящими от характера и степени неоднородности слоев, а также от наличия обратной связи между слоями.

По результатам работы, представленной в первой главе, была опубликована статья <sup>10</sup> (принята к печати). По итогу работы была зарегистрирована программа для ЭВМ <sup>11</sup>.

По результатам работы, представленной во второй главе, была опубликована статья <sup>12</sup>. Результаты данной главы были представлены на международной конференции – «DPG Spring Meeting», Regensburg, Germany. А также была зарегистрирована программа для ЭВМ <sup>13</sup>.

---

<sup>10</sup>Rybalova E. V., Strelkova G. I., Schöll E, Anishchenko V. S. Relay and complete synchronization in heterogeneous multiplex networks of chaotic maps //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2020»

<sup>11</sup>Е.В. Рыбалова, Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко, Программа для исследования удаленной синхронизации в системе трех связанных колец хаотических систем. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No2019664054. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 30.10.2019.

<sup>12</sup>Rybalova E. V., Vadivasova T. E., Strelkova G. I., Anishchenko V. S., Zakharova A. S. Forced synchronization of a multilayer heterogeneous network of chaotic maps in the chimera state mode //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2019. – V. 29. – №. 3. – P. 033134.

<sup>13</sup>Е.В. Рыбалова, Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко, Программный комплекс для исследования вынужденной синхронизации многослойных неоднородных сетей связанных нелинейных систем. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No2019664480. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 07.11.2019.