МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**
Кафедра дискретной математики и информационных технологий

# СИСТЕМЫ РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 09.03.01 — Информатика и вычислительная техника
факультета КНиИТ
Вершинина Андрея Сергеевича

Научный руководитель
профессор, д. ф.-м. н. ______________ В. А. Молчанов

Заведующий кафедрой
доцент, к. ф.-м. н. ______________ Л. Б. Тяпаев

Саратов 2020

# ВВЕДЕНИЕ

Системой различных представителей (сокращённо СРП или трансверсалью, сечением) совокупности множеств называется множество элементов-представителей каждого из множеств. Следовательно, трансверсаль существует тогда, когда можно из каждого множества выбрать по одному элементу так, чтобы все такие элементы различались. Очевидно, не всегда для совокупности множеств можно определить СРП, также возможно несколько СРП для одной коллекции множеств [1].

Задача нахождения СРП (или проверки её существования) имеет несколько формулировок, которые тем или иным образом приводятся к задаче нахождения совершенного паросочетания в двудольном графе. Двудольный граф — граф, в котором вершины разделяются на два множества (доли) таким образом, что каждое ребро соединяет вершины из разных долей.

Частный случай задачи нахождения максимального паросочетания — нахождение паросочетания максимальной мощности, можно решать, среди прочих, с помощью венгерского алгоритма, а также алгоритма Хопкрофта-Карпа.

Алгоритм, используемый для нахождения паросочетания максимального веса за полиномиальное время, был разработан Гарольдом Куном в 1955 году, и называется "Венгерским алгоритмом" [3]. Эта версия алгоритма использует матричное представление двудольного графа и имеет асимптотическую сложность $O(|V|^4)$, где $V$ — множество вершин графа. Затем, Д. Эдмондс и Р. Карп предложили его улучшение до $O(|V|^3)$; этот вариант будет рассматриваться в данной работе [4] [5].

Другим алгоритмом, решающим задачу нахождения паросочетания максимальной мощности, является алгоритм Хопкрофта-Карпа, имеющий асимптотику $O(\sqrt{|V|} \times |E|)$ для разреженных графов, и $O(V^{2.5})$ для плотных графов, где $V$ — множество вершин графа и $E$ — множество рёбер [6].

Общим для этих алгоритмов является использование поиска увеличивающих путей для увеличения мощности паросочетания. Венгерский алгоритм при этом использует серию обходов в глубину, а алгоритм Хопкрофта-Карпа — чередует фазы обходов в глубину и в ширину.

Целью данной работы является изучение систем различных представителей, связанных с ними задач и алгоритмов, позволяющих решать эти задачи, а также реализация приложения, позволяющего находить СРП в предоставляемых пользователем семействах множеств.

В ходе дипломной работы будет создано приложение, позволяющее находить системы различных представителей. Для этого должны быть решены следующие задачи:

— изучение систем различных представителей,
— изучение связанных с СРП задач,
— изучение алгоритмов, решающих задачу нахождения паросочетания максимальной мощности,
— реализация приложения

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Первый раздел дипломной работы посвящён рассмотрению систем различных представителей и связанных с ними задач. Данный раздел состоит из четырёх подразделов. В первом подразделе даётся определение системы различных представителей и рассматривается их представление в виде двудольных графов. Во втором подразделе рассматривается задача цепного разложения частично упорядоченных множеств. В третьем подразделе рассматриваются минимальные вершинные покрытия в двудольных графах и теорема Кёнига, связывающая их с максимальным паросочетанием в графах данного вида. В четвёртом и заключительном подразделе рассматривается максимальный поток в "двудольной"транспортной сети.

Второй раздел посвящён алгоритмам, позволяющим решать задачу нахождения системы различных представителей в семействе множеств в виде задачи нахождения паросочетания максимальной мощности в двудольном графе. Данный раздел состоит из двух подразделов. В первом подразделе рассматривается венгерский алгоритм и приводится его реализация. Во втором подразделе рассматривается алгоритм Хопкрофта-Карпа, его теория, и также приводится его реализация.

Третий раздел дипломной работы представляет описание разработанного приложения. Данный раздел состоит из двух подразделов. В первом подразделе рассматривается реализация алгоритма в приложении на языке программирования Java. Во втором подразделе описывается пользовательский интерфейс приложения и рассматриваются примеры его работы.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены системы различных представителей, а также связанные с ними задачи — о минимальном цепном разложении частично упорядоченных множеств, минимальном вершинном покрытии двудольного графа и о максимальном потоке в "двудольной"транспортной сети.

Рассматриваются алгоритмы решения задачи нахождения максимального по мощности паросочетания в двудольных графах — венгерского алгоритма и алгоритма Хопкрофта-Карпа.

В процессе выполнения работы было разработано приложение с графическим интерфейсом для нахождения систем различных представителей (в том числе, частичных) с использованием венгерского алгоритма. Семейство множеств предоставляется в виде текстового файла. В приложении реализована функция сохранения полученной СРП в текстовый файл, а также просмотр СРП в отдельном окне. Приложение реализовано на языке программирования Java, с использованием библиотеки JavaFX для реализации графического интерфейса.

Результаты работы могут быть использованы для изучения систем различных представителей и связанных задач. Разработанное приложение может применяться для рассмотрения СРП в различных семействах множеств.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1 *Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е.,*. Теория графов / Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. — Москва: Высшая школа, 1949. — С. 128–168.

2 *Motzkin, T.S.,*. The Assignment Problem // Proceedings of the Sixth Symposium on Applied Mathematics. — McGraw-Hill, 1956.

3 *Kuhn, H.W.,*. The hungarian method for the assignment problem / Kuhn, H.W. // *Naval Research Logistics Quarterly.* — 1955. — Vol. 1, no. 1-2. — Pp. 83–97.

4 *Скиена, М.,*. Алгоритмы. Руководство по разработке / Скиена, М. — БХВ-Петербург, 2012. — С. 514–517.

5 *Кристофидес, Н.,*. Теория графов. Алгоритмический подход / Кристофидес, Н. — Москва: Мир, 1978. — С. 368–404.

6 *Hopcroft, J.E., Karp, R.M.,*. An $n^{5/2}$ Algorithm for Maximum Matchings in Bipartite Graphs / Hopcroft, J.E., Karp, R.M. // *SIAM Journal on Computing.* — 1973. — Vol. 2, no. 4. — Pp. 225–231.

7 *Kőnig, D.,*. Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére / Kőnig, D. — Matematikai és Természettudományi Értesítő, 1916. — Pp. 104–119.

8 *Kőnig, D.,*. Gráfok és mátrixok / Kőnig, D. — Matematikai és Fizikai Lapok, 1931. — Pp. 104–119.

9 *Cormen, T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein, C.,*. Introduction to Algorithms, third edition / Cormen, T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein, C. — MIT Press, 2009.

10 *Ford, L.R., Fulkerson, D.R.,*. Flows in Networks / Ford, L.R., Fulkerson, D.R. — Princeton University Press, 1965.

11 *Edmonds, Jack,*. Paths, trees, and flowers / Edmonds, Jack. — 1963. — Vol. 17. — Pp. 449–467.

12 *Холл, М.,*. Комбинаторика / Холл, М. — Мир, 1970. — С. 64–72.

13 *Berge, C.,*. Two theorems in graph theory / Berge, C. // *PNAS.* — 1957. — Vol. 43, no. 9. — Pp. 842–844.