МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

«Реализация комплекса алгоритмов для бифуркационного анализа нелинейных
наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

дискретных отображений в среде разработки Lazarus»______________________

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента__2__ курса __231___группы

Направления 09.03.02.«Информационные системы и технологии»________

код и наименование направления

_________________Факультета нелинейных процессов___________________

наименование факультета

_________________Баянова Александра Сергеевича_______________________

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор____ ___________________ Д.В.Савин_____
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ___________________ А.А. Короновский
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2020

Характеристика работы

Работа посвящена созданию программы, способную строить дерево бифуркаций двумя методами: методом итераций и методом Ньютона, строить карту динамических режимов, подсчитывать мультипликатор для разных значений периода, находя точки бифуркации удвоения периода и касательной, отображая их как на дерево бифуркаций, так и на карту динамических режимов.

Целью настоящей бакалаврской работы является создание в среде разработки Lazarus программs, осуществляющей бифуркационный анализ нелинейных отображений.

В работе было использовано 16 литературных источников.

Содержание работы

ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени представления о поведении нелинейных систем развиты настолько глубоко, что можно говорить о сложившемся направлении – теории динамического хаоса [1, 2]. К ней примыкает теория бифуркаций – наука о качественном изменении поведения нелинейных систем, в частности, приводящем к хаотической динамике [3, 4]. Знания о поведении такого рода систем находят свое применение в различных областях науки и техники, в частности [5], в задачах о разработке систем связи [6] и схем передачи информации [7, 8], криптографии [9], задачах управления [10] и т. п. Существуют другие математические объекты, например, отображения, которые демонстрируют многие основные феномены нелинейной динамики - дискретные отображения [11]. Отображения значительно более просты при исследовании и компьютерном моделировании. В связи с этим, задача создания программ, способных анализировать поведение сложных нелинейных систем, в частности, нелинейных дискретных отображений, не теряет своей актуальности.

Задачей бакалаврской работы являлось создание в свободно распространяемой среде разработки Lazarus [12] программ, позволяющих визуализировать динамику одномерных отображений и получать для них линии бифуркаций коразмерности один.

1. ДЕРЕВО БИФУРКАЦИЙ

Работа программы тестировалась на примере модельного одномерного кубического отображения [11]:

$$x_{n+1}=a-bx_n+x_n^3 \quad (1)$$

Первым шагом в исследовании отображения было построение дерева бифуркаций.

Под деревом бифуркаций мы будем понимать график зависимости значений x_n в установившемся режиме от параметра [11]. Для его построения в среде Lazarus требуется создать два вложенных цикла. Первый цикл отвечает за изменение одного из двух параметров (значение второго выбирается константой), а вложенный в него второй цикл проводит *n*-ое количество итераций отображения (1). В цикле реализуется построение графика на плоскость зависимости *x* от параметра.

Полученный результат изображен на Рисунке 1.

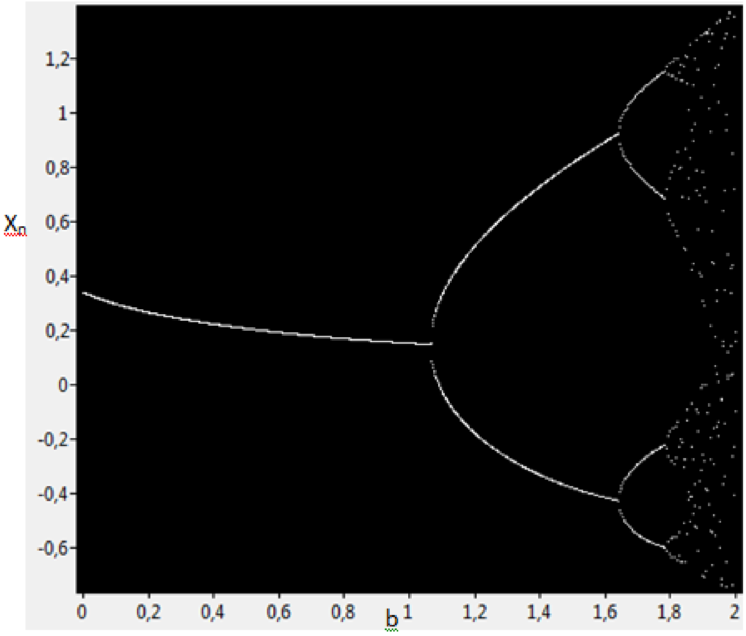

Рисунок 1 - дерево бифуркаций отображения (1)

2. МЕТОД НЬЮТОНА

Данный итерационный метод находит корень уравнения методом последовательных приближений.

Сам метод заключается в построении из начальной точки, которая находится вблизи предположительного корня уравнения, касательной к графику исследуемой функции. Точка, являющаяся точкой пересечения касательной и оси *X*, становится следующей точкой, из которой строится касательная - и так далее, пока не будет достигнута точка, попадающая в область погрешности (разница между двумя последовательными приближениями должна быть по модулю меньше заданной погрешности).

Алгоритм построения в этом случае будет основываться на следующем законе:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2)$$

Для того чтобы воспользоваться данной формулой для поиска неподвижной точки, выбранного для исследования отображения (1), нужно его преобразовать. Для этого, исходя из определения неподвижной точки, в формуле (1) приравниваются x_n и x_{n+1} (будем их далее для простоты обозначать x). Соответственно, уравнение приобретет вид:

$$f(x) = x - \varphi(x) = x - a + bx - x^3 = 0 \quad (3)$$

где $\varphi(x) = a - bx + x^3$ - нелинейная функция, задающая отображение (1).

В общем случае для поиска цикла периода k можно использовать тот же итерационный процесс метода Ньютона (2), но функция $f(x)$ будет уже другой. Исходя из определения цикла периода k, следует приравнивать значения переменной через k итераций, x_n и x_{n+k}. Для этого нужно записать k раз проитерированное отображение (1):

$$x_{n+k} = \varphi^{(k)}(x_n),$$

где $\varphi^{(k)}(x)$ – функция $\varphi(x)$, применённая последовательно k раз. Функция $f(x)$ в формуле (2) примет в таком случае вид x - $\varphi^{(k)}(x)$. Для построения такой функции в программе нужно создать подпрограмму, которая будет подсчитывать $\varphi^{(k)}(x)$ и $\varphi^{(k)}\,'(x)$. В подпрограмме изначально задается массив x0[n], который будет отвечать за вывод функции $\varphi(x)$, после n-ой итерации. В первую очередь задается начальное значение массива x0[1] = x_{n+1}= x. Для нахождения последующих n-1 функций, создается цикл, в котором каждому значению массива, начиная с x0[2], присваивается значение функции zz, в которое подставляется значение предыдущего элемента массива.

После нахождения всех нужных нам значений функций $\varphi^{(k)}(x)$, подобным способом реализуется нахождение $\varphi^{(k)}\,'(x)$. Для этого создается переменная xk, которая будет отвечать за вывод $\varphi^{(k)}\,'(x)$. Сама функция нахождения $\varphi^{(k)}\,'(x)$

заключается в присвоении xk произведения всех производных функций $\varphi(x)$в точках x = x0[n]. Для этого мы вводим новую функцию zz1, которая будет считать производную функции $\varphi(x)$. Сама программа представлена в приложении.

Результаты для периода 2, полученные таким образом, показаны на Рисунке 2

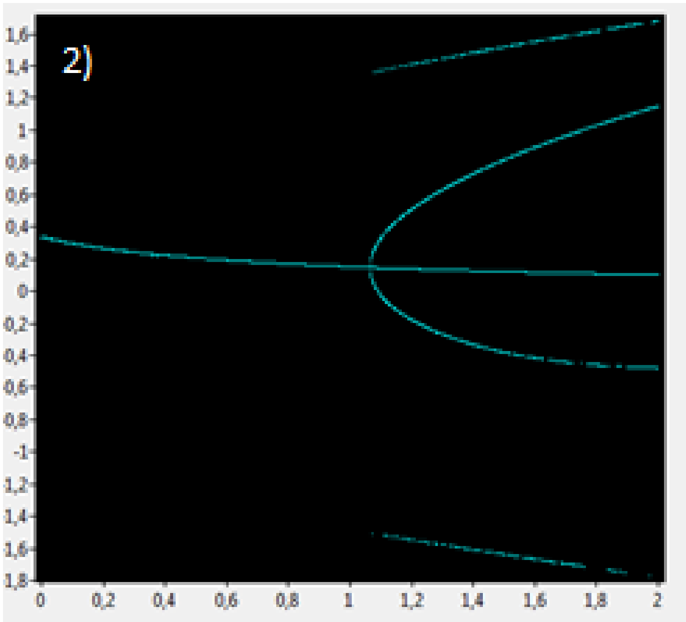

Рисунок 2 – дерево бифуркаций, построенное методом ньютона для периода два

3. КАРТА ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

Для изучения дискретного уравнения при изменении двух параметров пользуются картой динамических режимов.

Для ее построения в программе Lazarus создаются три вложенных цикла. Первый отвечает за перебор первого параметра, второй отвечает за перебор, соответственно, второго, а третий – за n-ое количество итераций отображения (1). Для определения периода при данных значениях параметра запоминаются последние десять значений x, после чего проводится проверка на их равенство между собой. Если соседние значения равны (разница между ними не превышает погрешности 10^{-15}), то данная точка соответствует периоду один, если первое значение x равно значению третьего, то данная точка соответствует периоду два, и т.д. Чтобы продемонстрировать период системы в данной точке, принято закрашивать ее разными цветами в зависимости от определенного периода, а область, в которой система уходит в бесконечность или переходит в хаос ($x>10^5$ или последние десять значений x между собой не равны) желтым и черным соответственно.

Полученный результат продемонстрирован на Рисунке 3.

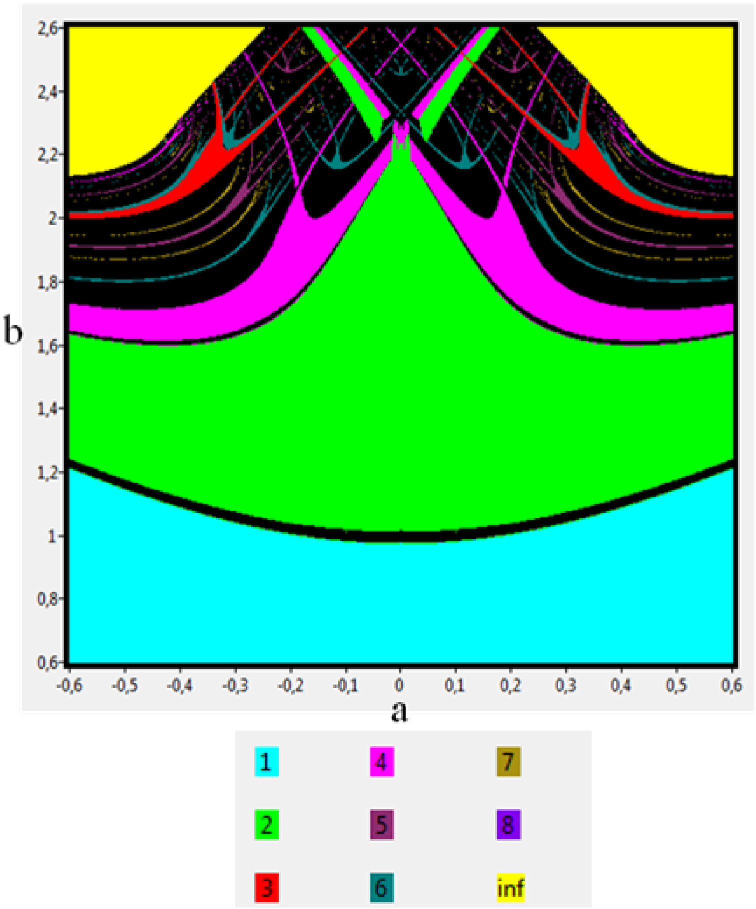

Рисунок 3 - карта динамических режимов. Цвета периодов подписаны под графиком.

4. МУЛЬТИПЛИКАТОР

Отметим, что, если $|f'(x_0)| < 1$, то итерации сходятся, а если $|f'(x_0)| > 1$, то итерации расходятся. Это позволяет судить об устойчивости неподвижной точки. В первом случае неподвижную точку называют устойчивой, а во втором – неустойчивой [11].

Заметим, что в силу большой важности величины $|f'(x_0)|$, она носит специальное название – мультипликатор, и обозначается обычно $\mu = |f'(x_0)|$. Соответственно, μ=-1 соответствует точке бифуркации удвоения периода [11].

Для определения мультипликатора для каждого из циклов периодов нужно воспользоваться методом, который был использован ранее для построения дерева бифуркации, методом Ньютона (2). Для этого проводим те же операции, что и при построении дерева бифуркации, но строим зависимость мультипликатора от параметра.

Полученный результат для периода один продемонстрирован на Рисунке 4.

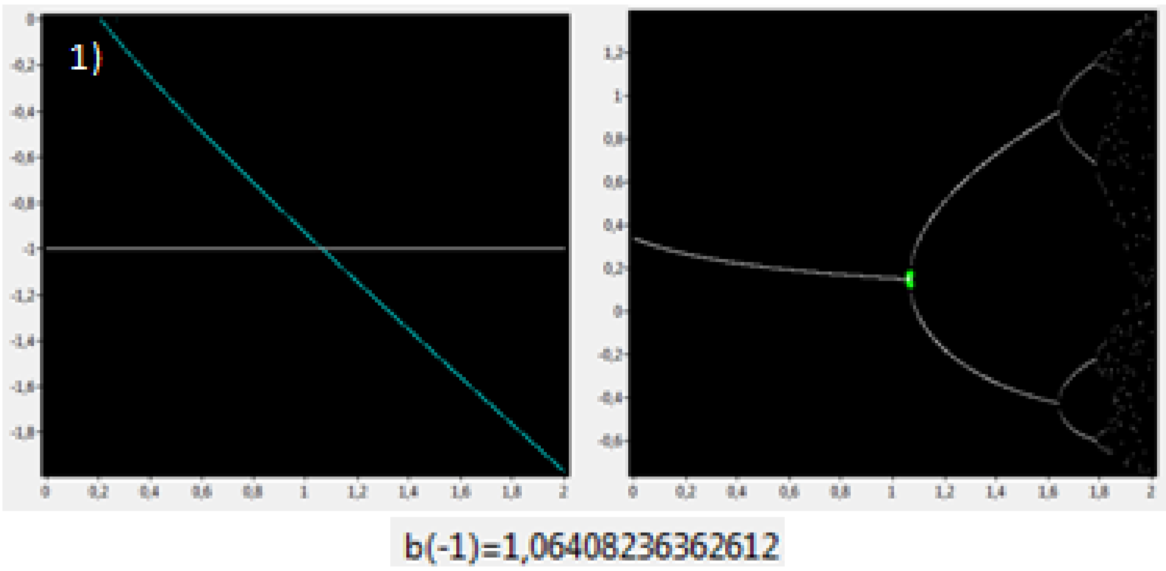

Рисунок 4 - зависимость мультипликатора от параметра *b*, при значении *a* = 0,3 , где b(-1) – значение параметра *b*, при котором мультипликатор равен минус единице, для периода один.

Из-за важности значений параметра, при котором мультипликатор равен минус единице, в программе реализовывался методом Ньютона подсчет параметра *b*, при котором мультипликатор был равен минус единице, и, для наглядности, отображалось найденное значение параметра на дерево бифуркации (зеленые точки на графике).

5. НАХОЖДЕНИЯ ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА НА КАРТЕ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

Реализовав нахождение точек удвоения для дерева бифуркаций, необходимо показать их и на карте динамических режимов. Для этого создается цикл, в котором перебираются значения параметра а и реализуется алгоритм поиска точки бифуркации из пункта 4. Найденные значения, при которых мультипликатор обращается в минус единицу, отображаются на карту динамических режимов.

Результаты для периода два, которые выдает программа, показаны на Рисунке 5.

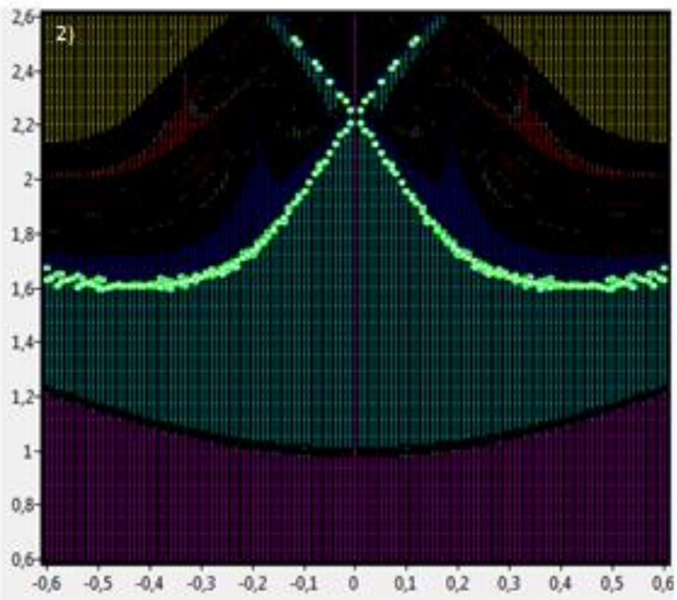

Рисунок 5 - точки бифуркации удвоения периода отображенные на карте динамических режимов для периода два.

6. КАСАТЕЛЬНАЯ БИФУРКАЦИЯ

Помимо бифуркации удвоения периода, которая возникает при равенстве мультипликатора равном минус единице, существует бифуркация, которую называют касательной.

Касательная бифуркация состоит в рождении (исчезновении) пары устойчивой и неустойчивой неподвижных точек. Условием данной бифуркации является равенство мультипликатора плюс единице. Для нахождения данной бифуркации, как и при нахождении бифуркации удвоения периода, вновь был использован метод Ньютона, но, в отличие от бифуркации удвоения периода, в программе нахождения точки касательной бифуркации задается поиск значений параметра при равенстве мультипликатора плюс единице [11].

Полученные результаты для периода два изображены на Рисунке 6.

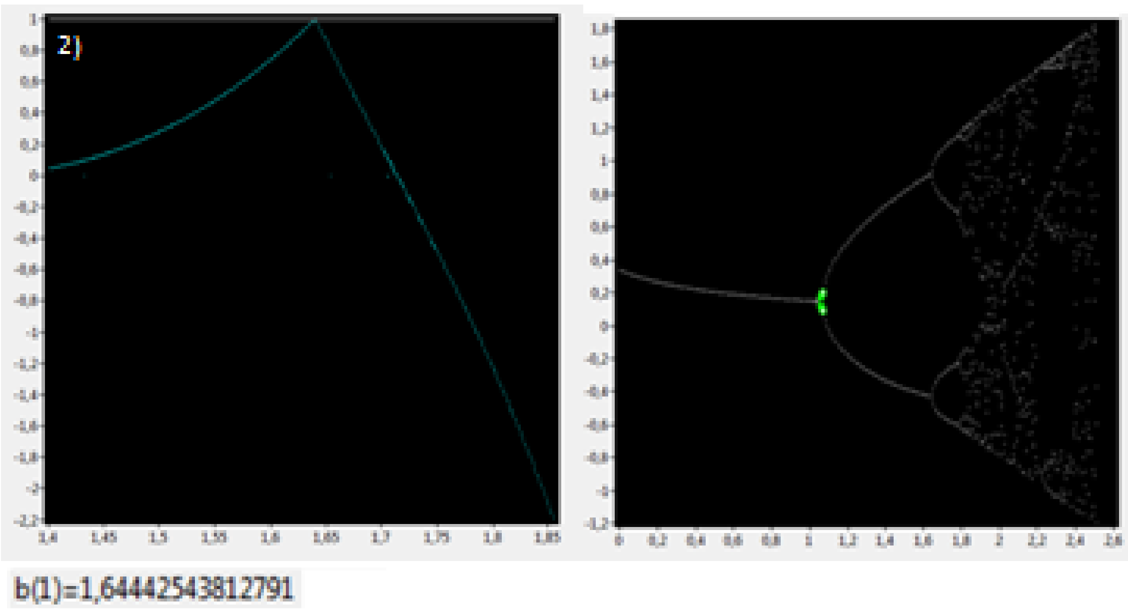

Рисунок 6 - зависимость мультипликатора от параметра *b* относительно прямой *b*= +1, при значении *a* = 0,3 для периода два

Аналогично пункту 5 отобразим точки касательной на плоскости параметров.

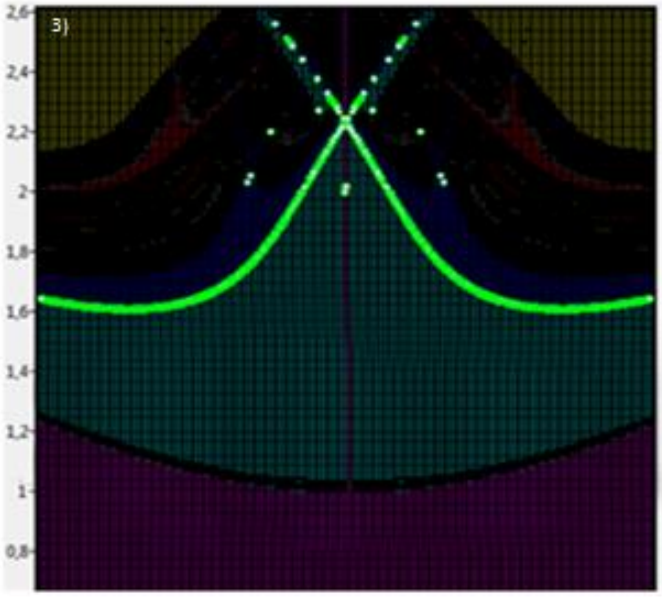

Рисунок 7 - точки бифуркации касательная отображенные на карте динамических режимов для периода один.

Как можно заметить, точки касательной бифуркации периода n совпадает с точками бифуркации удвоения периода n-1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было исследовано одномерное двухпараметрическое кубическое отображение и создана в среде разработки Lazarus программа, осуществляющая бифуркационный анализ нелинейных отображений.

Созданная программа способна строить дерево бифуркаций двумя методами: методом итераций и методом Ньютона, строить карту динамических режимов, подсчитывать мультипликатор для разных значений периода, находя точки бифуркации удвоения периода и касательной, отображая их как на дерево бифуркаций, так и на карту динамических режимов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Шустер, Г. Детерминированный хаос. М: Мир, 1990 – 240 с.

2 Кузнецов, С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006 – 355 с.

3 Гукенхеймер, Дж., Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей/ П. Холмс - М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002 – 560 с.

4 Kuznetsov, Yu. A. Elements of Applied Bifurcation Theory - New York: SpringerVerlag, 1995– 495 с.

5 Kapitaniak, T. Chaos for Engineers: Theory, Applications, and Control - Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000 – 144 с.

6 Chaos-Based Digital Communication Systems: Operating Principles, Analysis Methods, and Performance Evaluation/ F. C. M. Lau, C. K. Tse - Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003 – 228 с.

7 Дмитриев, А.С. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи / А.И. Панас - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002 – 252 с.

8. Короновский, А.А. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации / А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов //УФН — 2009 — Т. 179, №12 — С. 1281-1310.

9 Chaos-Based Cryptography: Theory,Algorithms and Applications. Editors / Ljupco Kocarev, Shiguo Lian - Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011 – 398 с.

10. Vilamitjana, E.R. Chaos in Switching Converters for Power Management: Designing for Prediction and Control / E.R. Vilamitjana, A. El Aroudi, E. Alarcon - New York: Springer, 2013 – 176 p.

11 Кузнецов, А.П. Введение в физику нелинейных отображений/ А.В. Савин, Л.В. Тюрюкина - Саратов: "Научная книга", 2010 – 134 с.

12. Lazarus [Электронный ресурс] // Википедия [Электронный ресурс]: Свободная энциклопедия. - URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Lazarus (дата обращения 07.06.2020). - Загл. с экрана. - Яз. рус.